فئة من أساتذة التعليم الجامعي

Mugooi.com

دراسة نظرية ومسائل في

الرياضيات المعاصرة

البنى الجبرية

الرياضيات المعاصرة

دراسة نظرية ومسائل

(٢)

مبادئ الجبر المجرد

- الزمرة
- الحلقة
- الحقل
- الفراغ الشعاعي
- التطبيقات الخطية
- المصفوفات والمعينات

الدكتور عادل سودان

الدكتور موفق دعبول

الدكتور خضر الأحمد

الدكتور محمد سعيد البرني

مؤسسة الرسالة

الطبعة الخامسة

١٤٠٥هـ - ١٩٨٥م

مؤسسة الرسالة بيروت – شارع سوريا – بناية صمدي وصالحة
هاتف: ٣١٩٠٣٩ – ٢٤١٦٩٢ ص.ب: ٧٤٦٠ برقياً: بيوشران

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

شهدت الرياضيات في أوائل هذا القرن انقلاباً جذرياً في واحد من أقدم فروعها ألا وهو علم الجبر . فحتى أواخر القرن التاسع عشر اعتبر الجبر علم الحساب الرمزي : ففي حين يستعمل الحساب الأعداد المألوفة، يستخدم علم الجبر رموزاً تدل على الأعداد . لكن الرياضيين ما لبثوا أن لاحظوا بأن بعض العلاقات التي ترد فيها هذه الرموز ، والتي كانت صحيحة عند استبدال الرموز بالأعداد ، تبقى صحيحة عند استبدال « أشياء » أخرى بهذه الرموز ، مثل الأشعة (المتجهات) والتوابع والمصفوفات وغيرها . وهكذا تحول الجبر من علم يقتصر على دراسة الدساتير وتنمية المهارات لحل مسائل من أنماط متقاربة، إلى علم هدفه دراسة العمليات الجبرية على مجموعات عناصرها ذات طبيعة مجردة عامة . ولهذا السبب يفضل أكثر الباحثين تسمية هذا الجبر « جبراً مجرداً » ، كما يسميه بعضهم « جبراً عاماً » أو « جبراً حديثاً » ؛ إلا أننا سنتمسك باسم « الجبر المجرد » للسبب الذي أوردناه .

ويرجع الفضل للعلامة الالماني فان در فاردن Van der Vaerden الذي كان أول من عرّف العاملين في حقل الرياضيات على الأفكار والنتائج والطرائق الرئيسية لهذا الجبر « الجديد » ، وذلك في كتابه ذائع الصيت « الجبر الحديث » والذي نشره في أوائل العقد الرابع من هذا القرن .

وقد كان لتطور الجبر المجرد أثر بعيد في تطوير فروع أخرى من الرياضيات ، ونخص منها بالذكر التوبولوجيا والتحليل التابعي . وأكثر من ذلك ، فإن الاهتمام المطرد بهذا الجبر في الآونة الأخيرة أدى إلى اكتشاف صلات جديدة بين الجبر المجرد والفروع العلمية الأخرى ، خاصة الفيزياء والكيمياء .

وهـذا الكتاب من سلسلة « الرياضيات المعاصرة » محاولة لتعريف القارىء العربي على بعض النواحي التي نعتبرها أساسية في الجبر المجرد . وقد بذلنا قصارى جهدنا لتيسير إدراك هذا العلم الجديد ، وذلك بتبسيط أسلوب العرض ، وبإيراد العديد من الأمثلة والتمارين المحلولة . ونحن نعتقد بأنه ما أن يألف الطالب هذا الموضوع ، حتى يؤخذ بجماله الداخلي ، ويعجب ممن يرى في الجبر المجرد مادة معقدة .

لقد حرصنا على أن يستفيد من هذا الكتاب كل راغب بالاطلاع على الجبر المجرد بشيء من التعمق ، فلم نجعله مقتصراً على منهاج سنة جامعية معينة ، فهو يغطي حاجة طالب السنة الجامعية الأولى في العلوم الرياضية والعلوم الفيزيائية أو الهندسية ، كما يلبي رغبـة من يريد التعرف على هـذا العلم ممن لم يتيسر لهم الإطلاع عليه خلال دراستهم الجامعية .

ولقد أشرنا إلى بعض بنود هذا الكتاب التي قد تتجاوز حاجة بعض

قرائه بـ * ، قاصدين بذلك تركها في القراءة الأولى والعودة إليها بعد أن يلم القارىء بأسس هذا العلم ويعتاد مفاهيمه ومصطلحاته .

يقسم الكتاب إلى قسمين أساسيين : البنى الجبرية الرئيسية ، ومبادىء الجبر الخطي . ففي القسم الأول تعالج العمليات الجبرية (قوانين التشكيل) بشيء من التفصيل ، كما تدرس مجموعة الأعداد الطبيعية و مجموعة الأعداد الصحيحة والزمرة والحلقة والحقل . أما القسم الثاني فيدرس الملامح الرئيسية لنظريتي الفراغ الشعاعي والتطبيقات الخطية من فراغ شعاعي إلى آخر . وعلينا أن نعترف بهذا الصدد أنه كان من المفضل اتمام دراسة المجموعات العددية بالتفصيل حتى نصل إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ، إلا أننا اضطررنا للعزوف عن ذلك لسببين : أولهما يفرضه علينا حجم الكتاب ، وثانيهما عدم رغبتنا في الخروج عن الاطار العام للجبر المجرد ، ذلك أن المعالجة التامة لمجموعة الأعداد الحقيقية تضطرنا للتعرض لبعض مفاهيم علم التوبولوجيا .

وتجدر بنا الإشارة إلى بعض المصطلحات الترقيمية المستعملة في الكتاب . فان ورود [٥ – ٢] مثلاً في سياق إحدى الجمل يعني أنه يجب الرجوع إلى البند الخامس من الفصل الثاني ، أي أن الرقم الأيمن يدل على البند ، والرقم الأيسر يدل على الفصل . كذلك فإن الرقم الروماني I يدل على الجزء الأول من الرياضيات المعاصرة . هذا ، وبغية مساعدة القارىء عند الرجوع إلى المصادر الأجنبية ، أوردنا في القسم الأخير من الكتاب قائمة بالمصطلحات العربية الواردة مع مقابل كل منها باللغتين الانجليزية والفرنسية .

وإننا لنأمل من هذا المرجع ، الذي يشكل إسهاماً متواضعاً في اغناء المكتبة الرياضية العربية ، التي تفتقر الى كتب في الجبر ، أن يكون حافزاً للجيل العربي الصاعد على الاستزادة من العلم والمعرفة ، اللذين بدونهما لن يكون بمقدورنا الصمود أمام التحديات التي تتعرض لها أمتنا في هـــذا الظرف الدقيق .

والله من وراء القصد .

دمشق في ٢٠ رجب ١٣٩١

١٠ ايلول ١٩٧١

المؤلفون

الفصل الأول

العمليات الجبرية (قوانين التشكيل)(*)

مقدمـــة :

درسنا في علم الحساب العمليات العددية الأساسية ، وأبرزها عمليتا الجمع والضرب . في كل من هاتين العمليتين يقابل كلّ زوج من الأعداد عدد آخر : حاصل جمعهما (أو مجموعهما) في حالة الجمع ، وحاصل ضربهما (أو جداؤهما) في حالة الضرب . وسندرس في هذا الفصل نمطاً أعم من العمليات على مجموعات عناصرها كيفية (ليست أعداداً بالضرورة) ، بحيث تشكل العمليات الحسابية المألوفة حالة خاصة من هـــذه العمليات الرياضية التي يطلق عليها اسم **العمليات الجبرية** أو **قوانين التشكيل** . والعمليات الجبرية نوعان . العمليات **الداخليـــة** (قوانين التشكيل الداخلية) ، والعمليات **الخارجية** (قوانين التشكيل الخارجية) . وأهم العمليات الداخلية هي العمليات **الثنائية** (**) ، ولما كانت العمليات الثنائيـة هي العمليات

(*) يوجد في آخر الكتاب جدول يورد المصطلحات باللغتين الانجليزية والفرنسية والتي تشكل المصطلحات العربية الواردة في هذا الكتاب ترجمة لها .

(**) تستخدم الغالبية العظمى من المؤلفين الإنجليز والروس مصطلح « العمليات الثنائية » ، بينما يقتصر جل المؤلفين الفرنسيين على استعمال مصطلح « قوانين التشكيل الداخلية» . هـــذا ويندر ورود مصطلح « قوانين التشكيل الخارجية » في المؤلفات الإنجليزية ، التي تستخدم في الغالب مصطلح «عملية الضرب السلمي » ، ولكننا لانستطيع هذه التسمية لأسباب لا تخفى على كل من اطلع على الفراغات الاقليدية .

الداخلية الرئيسية التي يتناولها علم الجبر بالدرس ، فإن جميع اخصائيي علم الجبر يعنون بالعمليات الداخلية (أي بقوانين التشكيل الداخلية) العمليات الثنائية منها دون غيرها .

العمليات الداخلية (قوانين التشكيل الداخلية) :

١ - ١ تعريف : نعرف العملية الداخلية (أو قانون التشكيل الداخلي) على مجموعة S ، بأنها قاعدة تمكننا من مقابلة كل زوج مرتب من عناصر S بعنصر وحيد من المجموعة S نفسها . واختصاراً نقول إن العملية الداخلية على المجموعة S هي تطبيق لـ $S \times S$ في S .

لنرمز بـ o للعملية الثنائية على S . لما كان o تابعاً بالتعريف ، فإن العنصر من S الذي يقابل الزوج المرتب (a , b) من $S \times S$ هو $o((a,b))$.
ولكن جرت العادة على استعمال الرمز aob عوضاً عن $o((a,b))$.
يسمى العنصر aob من S ناتج o على a , b ، أو اختصاراً ناتج a , b إذا لم يكن ثمة مجال للالتباس (العنصران a , b ليسا مختلفين بالضرورة) ؛ كما تسمى a المركبة الأولى (أو الحد الأول) و b المركبة الثانية (أو الحد الثاني) .

وعلى سبيل المثال ، ففي حالة عملية الجمع المعروفة ، نرمز عادة إلى العملية بـ + ، ونكتب ناتج جمع العنصرين a , b بالشكل a + b بدلاً من $+((a,b))$. وفي حالة عملية الضرب المعروفة ، نرمز إلى العملية بـ . ، ونكتب ناتج ضرب العنصرين a , b بالشكل a . b (أو ab) بدلاً من $.((a,b))$. ولما كنا بصدد تعميم لعمليتي الجمع والضرب

الحسابيتين ، فإننا نستعمل رموزاً أخرى للناتج مثل :

$a \top b$, $a \perp b$, $a \llcorner b$, $a \lrcorner b$, $a \triangle b$, $a \triangledown b$,

$a \square b$, $a \cup b$, ...

وتجدر بنا الإشارة إلى أنه قد نرمز إلى العملية الثنائية بـ + أو • دون أن نعني بذلك عملية الجمع أو الضرب المألوفتين في علم الحساب . ونسمي عندئذ الناتج $a+b$ مجموع الحدين a , b ونقرأه « a زائد b » . كذلك نسمي الناتج $a . b$ (أو ab) جداء العاملين a و b ، ونقرأه « a ضرب b » .

أمثـــلة :

٢ - ١ إن كلا من عمليتي الجمع والضرب المعروفتين في علم الحساب عملية داخلية على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أما الطرح فليس كذلك ، إذ لو كان الطرح عملية داخليـــة على N لكان من الضروري أن يكون حاصل طرح أي عنصرين من N عنصراً من N أيضاً . ولكن هذا غير محقق ، فلو أخـــذنا العنصرين $a , b \in N$ بحيث $a < b$ فإن $a - b \notin N$. كذلك فإن القسمة الحسابية المعروفة ليست عملية داخلية على N (لماذا ؟) .

٣ - ١ لتكن $P(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة E . إن العملية o المعرفة على $P(E) \times P(E)$ بالقاعدة :

$$A \circ B = A \cup B$$

هي عملية داخلية على $P(E)$ ، ذلك أنه يقابل كل زوج (A,B) من

$P(E) \times P(E)$ عنصر وحيد من $P(E)$ هو اجتماع المجموعتين الجزئيتين A, B أي $A \cup B$.

كذلك فإن العملية o المعرفة بالقاعدة $A \circ B = A \cap B$ هي عملية داخلية على $P(E)$ (لماذا ؟) .

٤ - ١ لا يشكل الجمع المعروف في علم الحساب عملية داخلية على المجموعة $S = \{0, 1, 2, 3\}$. في الحقيقة ليس مجموع أي عنصرين من S عنصراً من S ، فمثلاً : $1 + 3 = 4 \notin S$.

كذلك فإن الضرب على S لا يشكل عملية داخلية على S (لماذا ؟) .

٥ - ١ من الممكن تمثيل العملية الداخلية على مجموعة منتهية بجدول يسمى جدول العملية . وعلى سبيل المثال فإن الجدول (١) الذي يعرف

*	p	q	r	s
p	r	s	p	q
q	p	q	r	s
r	s	p	q	r
s	q	r	s	p

جـــدول (١)

عملية داخلية $*$ على المجموعة $E = \{p, q, r, s\}$ يُترجم على النحو التالي : يقابل كلّ زوج مرتب (x, y) من $E \times E$ العنصرُ الواقع عند تقاطع السطر المار من x بالعمود المار من y . وعلى هذا فإن :

$$r * q = p \quad ; \quad s * q = r$$

بينما :

$$q * r = r \quad ; \quad q * s = s$$

٦ - ١ إن عملية الضرب الخارجي الشعاعي (والتي يرمز لها المؤلفون بـ $\wedge$ أو $\times$) المعرفة على مجموعة الأشعة الطليقة V في الفراغ الحقيقي ذي الأبعاد الثلاثة R^3 هي عملية داخلية على V ، وذلك وفقاً لتعريف هذه العملية . أما الضرب الداخلي أو العددي للأشعة , المعرف على V فلا يشكل عملية داخلية (لماذا ؟) .

ملاحظـــات :

٧ - ١ يعبر أحياناً عن كون o عملية داخلية على مجموعة S بالقول إن S مجموعة مغلقة بالنسبة لـ o . وهكذا فقد رأينا [٢ - ١] أن N مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين ، وغير مغلقة بالنسبة للطرح والقسمة .

كذلك فإذا كانت A مجموعة جزئية من S المزودة بالعملية الداخلية o (أي التي عرفنا عليها o) ، فإننا نقول إن A مغلقة (أو مستقرة) بالنسبة لـ o ، إذا تحقق الشرط :

$$\forall a , b \in A \; : \; a o b \in A$$

وعلى سبيل المثال فإن المجموعة الجزئية {0 , 1} من N مستقرة بالنسبة لعملية الضرب العادية ، ذلك أن كلا من $1 . 1 = 1$, $1 . 0 = 0$, $0 . 1 = 1$, $0 . 0 = 0$ عنصر من A . أما {0 , 1} فليست مستقرة بالنسبة لعملية الجمع رغم أن كلا من $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$ ، ينتمي إلى A ، وذلك لأن المجموع $1 + 1 = 2$ لا ينتمي إلى A .

٨ - ١ يبين المثـال ٣ - ١ أنه يمكن أن نعرف على مجموعة واحدة أكثر من عملية داخلية ، وذلك لأن عمليتي الاجتماع ∪ والتقاطع ∩ مختلفتان عموماً . كذلك فإن عملية طرح مجموعتين هي عملية داخلية ثالثة على P (E) ، كما يمكن إيراد عمليات داخلية أخرى .

٩ - ١ إن العمليات الثنـائية تشكل حالة خاصة من العمليات الجبرية الداخلية التي تعرّف عموماً على أنها عمليات نونية . وبوجه عام فإن العملية النونية على مجموعة S هي تطبيق لـ $S \times S \times \ldots \times S$ (عدد المضاريب n) في S. والعملية النونية الوحيدة التي سبق ورأيناها فضلاً عن العملية الثنائية هي العملية الأحادية ($n = 1$) ، إذ أن هذه العملية هي ببساطة تطبيق لـ S في المجموعة S نفسها [وكمثال على العملية الأحادية نورد عملية الاتمام المعرفة على P(E) مجموعة أجزاء E (انظر I)] . وكما سبق وذكرنا في المقدمة فإن العمليات الداخلية الرئيسية التي يدرسها علم الجبر هي العمليات الثنائية ، وهذا هو السبب في قصر اسم العمليات الجبرية الداخلية (أو قوانين التشكيل الداخلية) على العمليات الثنائية منها وحدها .

أنماط خاصة من العمليات الثنائية :

١٠ - ١ **تعريف** : لتكن o عملية داخلية على مجموعة S . تسمى العملية o **تجميعية** (قابلة للدمج) إذا تحقق الشرط :

$$\forall a , b , c \in S \ : \ a o (b o c) = (a o b) o c$$

١١ - ١ **ملاحظة** : نستنتج بأنه في حالة العملية التجميعية يمكن

تغيير موضع القوسين دون أن يتأثر الناتج . ولهذا السبب فيمكن في حالة العملية التجميعية o حذف القوسين وكتابة الناتج $a o (b o c)$ [أو $(a o b) o c$] بالشكل $a o b o c$.

١٢ - ١ **تعريف** : لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o :

(١) نقول عن عنصرين a.b من S إنهما **قابلان للمبادلة** إذا كان
$a o b = b o a$

(٢) إذا كانت جميع عناصر S قابلة للمبادلة مثنى مثنى ، أي إذا تحقق الشرط .

$$\forall a , b \in S \quad : \quad a o b = b o a$$

فإننا نقول إن العملية o **تبديلية** ، كما نقول إن المجموعة S (المزودة بـ o) **تبديلية أو آبلية** ، نسبة إلى العالم الرياضي النرويجي آبل Abel (١٨٠٢ - ١٨٢٩)

أمثـــلة :

١٣ - ١ إن عمليتي الجمع والضرب العاديتين والمعرفتين على مجموعة الأعداد الحقيقية R تجميعيتان وتبديليتان . أما القسمة العادية التي هي عملية داخلية على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ فليست تجميعية [مثلاً $12 \div \left(\frac{3}{2} \div \sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$ بينما $\left(12 \div \frac{3}{2}\right) \div \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$] وليست تبديلية (مثلاً $\pi \div 7 \neq 7 \div \pi$) .

١٤ - ١ إن الجدول (٢) يعرف على $\{a, b\}$ عملية T تبديلية وليست تجميعية ذلك أن $aTb = bTa (= b)$ من جهة، إلا انـــه

من جهة أخرى :

$$\left.\begin{array}{l} a \top (a \top b) = a \top b = b \\ (a \top a) \top b = b \top b = a \end{array}\right\} \Rightarrow a \top (a \top b) \neq (a \top a)\, b$$

وبالتالي فالعملية T غير تجميعية

T	a	b
a	b	b
b	b	a

جدول (٢)

١٥ - ١ إن عملية تركيب التطبيقات o تجميعية وليست تبديلية (انظر I) .

١٦ - ١ إن عملية الضرب الشعاعي ∧ [٦ - ١] ليست تجميعية وليست تبديلية . فإذا أخذنا في R^3 ثلاثة أشعة واحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى وموجهة بحيث تكون الثلاثية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مباشرة فإن :

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{o} = \vec{o} \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{j} \neq \vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{j})$$

لذلك فإن العملية ∧ غير تجميعية

كذلك لدينا

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{i} \wedge \vec{j} \neq \vec{j} \wedge \vec{i}$$

إذن العملية ∧ غير تبديلية

١٧ - ١ تعريف : لتكن S مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين * و o .
نقول عن العملية o إنها توزيعية من اليسار بالنسبة للعملية * (أو على العملية *) إذا توافر الشرط :

$$\forall a , b , c \in S \;:\; a \, o \, (b * c) = (a \, o \, b) * (a \, o \, c)$$

ونقول عن o إنها توزيعية من اليمين بالنسبة لـ * إذا كان :

$$\forall a , b , c \in S \;:\; (b * c) \, o \, a = (b \, o \, a) * (c \, o \, a)$$

أما إذا كانت العملية o توزيعية من اليسار ومن اليمين بالنسبة للعملية * قلنا اختصاراً إن o توزيعية بالنسبة لـ * .

أمثلة :

١٨ - ١ إن عملية الضرب العادية على مجموعة الأعداد الصحيحة Z توزيعية بالنسبة لعملية الجمع العادية على هذه الأعداد ، ذلك أن :

$$\forall a , b , c \in Z \;:\; a.(b+c) = a.b + a.c \;,\; (b+c).a = b.a + c.a$$

أما عملية الجمع فغير توزيعية بالنسبة لعملية الضرب لا من اليسار (في الحالة العامة $a + (b.c) \neq (a+b).(a+c)$) ولا من اليمين (في الحالة العامة $(b.c) + a \neq (b+a).(c+a)$).

١٩ - ١ إن كلا من عمليتي اجتماع وتقاطع المجموعات [٣ - ١] توزيعية بالنسبة للأخرى ، ذلك أنه أيا كانت A , B , C من P (E) فإن (انظر I) :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

كذلك فإن :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$$

٢٠ - ١ لنعرف على Z عمليتين ثنائيتين : أولاهما عملية الجمع العادية + ، وثانيتهما العملية o المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a , b \in Z \quad : \quad a o b = a^2 b \qquad (*)$$

(١) لدينا :

$\forall a , b , c \in Z \quad : \quad a o (b + c) = a^2 (b + c)$ (استناداً إلى (*))

$= a^2 b + a^2 c$ (الضرب توزيعي بالنسبة للجمع)

$= a o b + a o c$ (استناداً إلى (*))

وبالتالي فإن o توزيعية من اليسار بالنسبة لـ + .

(٢) لما كانت اللامساواة :

$$(b + c) o a = (b + c)^2 a = b^2 a + 2 b c a + c^2 a \neq (b o a) +$$
$$+ (c o a) = b^2 a + c^2 a$$

صحيحة في الحالة العامة ، فإن العملية o غير توزيعية بالنسبة لعملية الجمع +

عناصر خاصة من المجموعات المزودة بعمليات داخلية :

٢١ - ١ تعريف لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o ، وليكن e عنصراً من S :

(أ) يسمى e عنصراً محايداً أيمن بالنسبة لـ o (أو لـ o) إذا كان :

$$\forall x \in S \quad : \quad x o e = x$$

(ب) يسمى e عنصراً محايداً أيسر بالنسبة لِ o (أو لـ o) إذا كان :

$$\forall x \in S \quad : \quad e o x = x$$

(ح) يسمى e عنصراً محايداً بالنسبة لـ o (أو لـ o) إذا كان :

$$\forall x \in S \quad : \quad x o e = e o x = x$$

هذا وإذا كان e عنصراً محايداً أيمن أو محايداً أيسر أو محايداً لـ o ، وكان a′ و a عنصرين من S فعندئذ :

(أَ) يسمى a′ نظيراً أيمن لـ a بالنسبة لـ o إذا كان : $a o a' = e$.

(بَ) يسمى a′ نظيراً أيسر لـ a بالنسبة لـ o إذا كان : $a' o a = e$.

(حَ) يسمى a′ نظيراً لـ a بالنسبة لـ o إذا كان : $a o a' = a' o a = e$ ، وفي هذه الحالة نقول إن a قابل للمناظرة بالنسبة لـ o . (سنستعمل للدلالة على النظير في أبحاثنا القادمة) .

٢٢ - ١ **نتيجة** : نستخلص مباشرة من (حَ) أنه إذا كان a′ نظيراً لـ a بالنسبة لعملية ثنائية o ، فإن a يكون نظيراً لـ a′ بالنسبة لـ o ؛ لذا يمكن القول هنا بأن هذين العنصرين **متناظران** بالنسبة لـ o .

أمثلة :

٢٣ - ١ إن الصفر عنصر محايد بالنسبة لعملية الجمع على Z ،

ذلك أن :

$$\forall x \in Z \quad : \quad x + 0 = 0 + x = x .$$

والعدد 1 هو عنصر محايد لعملية الضرب على Z ، لأن :

$$\forall x \in Z \quad : \quad x . 1 = 1 . x = x .$$

كذلك فإن لأي عنصر x من Z نظيراً بالنسبة لعملية الجمع هو x - لأن $x + (-x) = (-x) + x = 0$. وبالعكس فلا يوجد لأي عنصر x من Z مغاير لـ 1 ± نظير في Z بالنسبة لعملية الضرب .

٢٤ - ١ إن المجموعة الخالية Φ عنصر محايـــد بالنسبة للعمليـة ∪ على P(E) [٣ - ١] ، كما أن E عنصر محايد بالنسبة للعملية ∩ .

٢٥ - ١ لا يوجد في V عنصر محايد لعملية الضرب الخارجي المعرفة على مجموعة الأشعة الطليقة V في الفراغ R^3 .

٢٦ - ١ لتكن $S = \{a_1 , a_2 , a_3\}$ مجموعة مزودة بعملية داخلية نرمز لها بـ + وممثلة بالجدول (٣) .

+	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_1	a_2	a_3
a_3	a_1	a_2	a_3

جدول (٣)

لما كان :

$$\forall a_i , a_j \in S \quad : \quad a_i + a_j = a_j$$

فإن كلا من العناصر a_1 , a_2 , a_3 هو عنصر محايد أيسر لـ + ، في حين لا يشكل أي من هذه العناصر عنصراً محايداً أيمن لـ + .

هذا ويتبين من المساواة السابقة بأن لكل من عناصر S ثلاثة نظائر يسرى (هي بالطبع a_1 , a_2 , a_3) ، ذلك أنه من أجل a_2 مثلاً نرى أن :

$$a_1 + a_2 = a_2 \quad , \quad a_2 + a_2 = a_2 \quad , \quad a_3 + a_2 = a_2$$

ولما كان a_2 عنصراً محايداً (أيسر) فإننا نستنتج استناداً إلى تعريف النظير أن كلا من a_1 , a_2 , a_3 نظير أيسر لـ a_2 .

كذلك فإن جميع عناصر S تشكل نظائر يمنى لكل من عناصر S . لنختر a_2 على سبيل المثال . من الواضح أن :

$$a_2 + a_1 = a_1 \quad , \quad a_2 + a_2 = a_2 \quad , \quad a_2 + a_3 = a_3$$

ولما كانت a_1 , a_2 , a_3 عناصر محايدة (يسرى) للعملية + فإن a_1 , a_2 , a_3 هي نظائر يمنى لـ a_2 .

وتجدر بنا الإشارة إلى أنه على الرغم من وجود ثلاثة نظائر يسرى وثلاثة نظائر يمنى لكل عنصر من S بالنسبة لـ + ، فإن لكل عنصر a_i من S نظيراً وحيداً بالنسبة لـ + هو a_i نفسه . وفي الحقيقة فإن $a_i + a_i = a_i$ ، يعني أن a_i هو نظير نفسه ؛ ولكن لو وجد نظير آخر a_j لـ a_i مغاير لـ a_i ، للزم أن يكون $a_i + a_j = a_j + a_i$ ، إلا أن هذا مستحيل لأن $a_i + a_j = a_j$ و $a_j + a_i = a_i$ و $a_i \neq a_j$ فرضاً .

نظريات أساسية حول العمليات الداخلية :

٢٧ - ١ نظرية : لتكن o عملية داخلية على مجموعة S ؛ عندئذ :

(أ) إذا كان e_1 عنصراً محايداً أيمن لـ o ، وكان e_2 عنصراً محايداً أيسر لـ o ، فإن : $e_1 = e_2$

(ب) لا يمكن أن يكون في S أكثر من عنصر محايد واحد لـ o .

البرهان : (أ) إن تعريف العنصر المحايد الأيمن والأيسر لـ o يقتضي التالي :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in S \;:\; x \text{ o } e_1 = x \Rightarrow e_2 \text{ o } e_1 = e_2 \\ \forall x \in S \;:\; e_2 \text{ o } x = x \Rightarrow e_2 \text{ o } e_1 = e_1 \end{array}\right\} \Rightarrow e_1 = e_2$$

(ب) إن صحة الدعوى (ب) تنتج من (أ) ، ذلك أن العنصر المحايد تعريفاً هو محايد أيمن ومحايد أيسر في آن واحد .

٢٨ - ١ **نظرية** : لتكن o عملية داخلية تجميعية على مجموعة S ، e عنصراً محايداً لـ o ، a عنصراً من S . عندئذ :

(أ) إذا كان $a_1 \in S$ نظيراً أيسر ، $a_2 \in S$ نظيراً أيمن لـ a بالنسبة لـ o ، فإن $a_1 = a_2$.

(ب) لا يمكن أن يكون لـ a أكثر من نظير واحد بالنسبة لـ o .

البرهان : (أ) لما كان a_1 , a_2 نظيرين أيمن وأيسر لـ a على الترتيب، فإننا نجد [٢١ - ١] : $a \text{ o } a_2 = e \;,\; a_1 \text{ o } a = e$. وبملاحظة أن o تجميعية فإننا نجد :

$$a_1 = a_1 \text{ o } e = a_1 \text{ o} (a \text{ o } a_2) = (a_1 \text{ o } a) \text{ o } a_2 = e \text{ o } a_2 = a_2$$

(ب) إن صحة الدعوى (ب) تنتج من (أ)، ذلك أن نظير a هو تعريفاً نظير أيمن ونظير أيسر لـ a في آن واحد.

٢٩ - ١ نظرية : إذا كانت o عملية داخلية تجميعية على مجموعة S، فإن :

$$\forall a, b, c, d \in S \;:\; (a o b) o (c o d) = a o ((b o c) o d)$$

$$\forall a, b, c, d \in S \;:\; (a o b) o (c o d) = ((a o b) o c) o d$$

البرهان : لنثبت صحة أولى هاتين العلاقتين (يتم إثبات العلاقة الثانية بصورة مماثلة للأولى).

لنفرض مؤقتاً أن $x = c o d$. عندئذ إذا استخدمنا الخاصة التجميعية لـ o فإننا نجد :

$$(a o b) o (c o d) = (a o b) o x = a o (b o x) =$$

$$= a o (b o (c o d)) = a o ((b o c) o d)$$

٣٠ - ١ ملاحظة : تبين هذه النظرية أنه إذا كانت o عملية داخلية تجميعية على مجموعة S، فإنه أياً كانت $a_1, a_2, a_3, a_4 \in S$:

$$((a_1 o a_2) o a_3) o a_4 = (a_1 o (a_2 o a_3)) o a_4 = a_1 o ((a_2 o a_3) o a_4) =$$

$$= a_1 o (a_2 o (a_3 o a_4))$$

وهذا معناه أنه لحساب ناتج هذه العناصر، فمن الممكن البدء من اليمين أو من اليسار. كذلك نعرف ناتج العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (مأخوذة بهذا الترتيب) بأنه ذلك العنصر من S الحاصل عند بدء الحسابات من اليسار.

ويبرهن بطريقة الاستنتاج الرياضي بأن هـذا الناتج لا يختلف فيما لو بدأنا بالحسابات من اليمين ، أو بشكل أعم ، فيما إذا وضعنا الأقواس بشكل كيفي مع مراعاة ترتيب العناصر $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$. وعلى هذا الأساس فإن الناتج الوحيد (بالنسبة للعملية التجميعية o) يكتب دون وضع الأقواس على الشكل $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$ ، أو اختصاراً على الشكل :

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\bigcirc}} a_i$$

وفي حالة استعمال الرمز + للدلالة على العملية الداخلية التجميعية ، فإننا نكتب الناتج على النحو التالي :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

أما في حالة استعمال عملية الضرب ، فنكتب :

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

١ - ٣١ **تعريف** : يطلق اسم مونونيد (Monoïd) على الزوج المرتب (M , o) حيث M مجموعة ، o عملية داخلية على M ، شريطة أن تكون o تجميعية ، وأن تحتوي M على عنصر محايد لـ o (إذا كان (M , o) مونونيداً)، قلنا إن لدينا « المونونيد M بالنسبة لـ o » ، أو اختصاراً « المونونيد M » إذا لم يكن ثمة مجال للالتباس) .

١ - ٣٢ **نظرية** : ليكن M مونونيداً بالنسبة لـ o عنصره المحايد e ،

وليكن b , a عنصرين من M . فاذا افترضنا أن نظيري b , a بالنسبة لـ o موجودان وهما b' , a' على الترتيب ، فإن نظير العنصر $a \circ b$ هو $b' \circ a'$.

البرهان : لدينا استناداً إلى تجميعية o وإلى [٢٩ – ١] :

$$(a \circ b) \circ (b' \circ a') = a \circ (b \circ b') \circ a' = a \circ e \circ a' =$$
$$= (a \circ e) \circ a' = a \circ a' = e$$

$$(b' \circ a') \circ (a \circ b) = b' \circ (a' \circ a) \circ b = b' \circ e \circ b =$$
$$= (b' \circ e) \circ b = b' \circ b = e$$

وهو المطلوب .

٣٣ - ١ تعريف : لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o . نقول عن العنصر a من S إنه منتظم ، أو إنه قابل للاختصار ، إذا تحقق الاقتضاءان التاليان أيا كان $b , c \in S$:

$$a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c \quad , \quad b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c$$

٣٤-١ نظرية : ليكن M مونوئيداً بالنسبة لـ o عنصره المحايد e . فإذا كان للعنصر c من M نظير بالنسبة لـ o ، فان c عنصر منتظم .

البرهان : لنرمز لنظير c (الوحيد استناداً إلى [٢٨ – ١]) بـ c' . فاذا كان b , a عنصرين اختياريين من M فان :

$$a \circ c = b \circ c \Rightarrow (a \circ c) \circ c' = (b \circ c) \circ c'$$

$$\Rightarrow a \circ (c \circ c') = b \circ (c \circ c') \qquad \text{(لأن } o \text{ تجميعية)}$$

$\Rightarrow a o e = b o e \Rightarrow a = b$

هـــذا ويتم الاقتضاء الآخر $c o a = c o b \Rightarrow a = b$ بصورة مماثلة ، وهو المطلوب .

٣٥ ـ ١ **نظرية** : ليكن M مونوئيداً بالنسبة لـ o عنصره المحايد e . فاذا كان a , b عنصرين من M ، ووجـد لـ a نظير a′ بالنسبة لـ o ، كان لكل من المعادلتين $y o a = b$, $a o x = b$ حل وحيد في S .

البرهان : لنختر المعادلة $a o x = b$ ، ولنبرهن أن العنصر $a' o b$ (الذي ينتمي إلى M وضوحاً) حل وحيد لها . نلاحظ أولاً أن $a' o b$ يحقق المعادلة المختــارة ، ذلك أنه استناداً إلى تجميعية o وإلى تعريف e , a' :

$$a o (a' o b) = (a o a') o b = e o b = b$$

هذا ، ولا يمكن أن يكون للمعادلة $a o x = b$ أكثر من حل واحد ، ذلك أننا لو افترضنا وجود حل آخر z $(z \neq x)$ ، لـكان $a o z = b$ ، ولكان بالتالي $a o x = a o z$. ولكن هـذه المساواة تقتضي [٣٤ ـ ١] $x = z$ وهذا مخالف للفرض .

ويبرهن على صحة النظرية في حالة المعادلة $y o a = b$ بصورة مماثلة ، وهو المطلوب .

٣٦ ـ ١ **ملاحظة** : لنفرض أن لكل عنصر من المونوئيد (M , o) نظيراً . عندها يقابل كل زوج (a , b) من عناصر M عنصر وحيد x وعنصر وحيد y في M بحيث :

$$b \circ x = a \quad , \quad y \circ b = a$$

ولكن هذا يعني [١ – ١] أننا أمام عمليتين داخليتين جديدتين على M هما ▭ و ▯ بحيث :

$$a \text{▭} b = x = b' \circ a \quad , \quad a \text{▯} b = y = a \circ b'$$

وتسمى هاتان العمليتان العمليتين المعاكستين للعملية o .

هذا وإذا كانت العملية o تبديلية ، فلا فرق عندئذ بين ▭ و ▯ ، أي أنه يكون عندئذ لـ o عملية معاكسة واحدة . وعلى سبيل المثال ، فاذا كانت o هي عملية الجمع على Z ، فان العملية المعاكسة هي عملية الطرح ؛ وإذا كانت o هي عملية الضرب على R^+ ، فان معاكستها هي عملية القسمة .

٣٧ – ١ انسجام علاقة تكافؤ مع عملية داخلية :

لتكن S مجموعة عرفنا عليها علاقة تكافؤ R وعملية داخلية o . من المعلوم أن علاقة التكافؤ تجزىء المجموعة S إلى أصناف تكافؤ منفصلة ، تسمى مجموعة هذه الأصناف بحاصل قسمة S على العلاقة R ، ويرمز لها بـ S/R (انظر I) .

من الممكن أن نحدد شروطاً لو توافرت لاشتققنا من العملية الداخلية o على S عملية داخلية على S/R . من الواضح أنه حتى يكون $O : ((x), (y)) \to (x \circ y)$ تطبيقاً لـ $S/R \times S/R$ في S/R ، يلزم أن يكون الصنف (x o y) تابعاً بشكل وحيد للصنفين (y) و (x)

فقط وليس تابعاً للممثلين x لـ (x), y لـ (y) ، أي أن :

$$x \, R \, x_1 \quad , \quad y \, R \, y_1 \Rightarrow x \, o \, y \; R \; x_1 \, o \, y_1$$

وإذا تحقق هذا ، فاننا نقول إن علاقة التكافؤ R منسجمة مع العملية الداخلية o . وعندها يمكن تعريف عملية داخلية O على مجموعة أصناف التكافؤ (أي على S/R) بالقاعدة :

$$(x) \, O \, (y) = (x \, o \, y)$$

مع التأكيد ثانية على أن الصنف الوارد في الطرف الأيمن مستقل عن الممثلين المختارين x , y ولا يتعلق إلا بالصنفين (y) , (x) .

تسمى العملية الداخلية O المعرفة على S/R حاصل قسمة العملية o على علاقة التكافؤ R .

وعلى سبيل المثال ، فاذا عرفنا العلاقة R في Z على الشكل : « العدد الصحيح 2 يقسم n − m » ، فان R تجزىء Z إلى صنفي التكافؤ : مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية ، ومجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية . فاذا عرفنا على صنفي تكافؤ Z هذين (وهما (1) , (0)) عملية الجمع (+) وفق القاعدة :

$$\forall \, (x) , (y) \in Z/R \quad : \quad (x) + (y) = (x + y)$$

فان العملية الداخلية (+) على Z/R منسجمة مع R (لماذا ؟)

العمليات الخارجية (قوانين التشكيل الخارجية) :

٣٨ - ١ **تعريف** : لتكن A , S مجموعتين . تعرف العملية

الخارجية اليمنى في S بأنها تطبيق لـ $A \times S$ في S ؛ وتعرف العمليـة الخارجية اليسرى في S بأنها تطبيق لـ $S \times A$ في S . وتسمى المجموعة A ساحة المؤثرات ، كما تسمى عناصر A في الحالة الأولى مؤثرات يمنى ، وفي الحالة الثانية مؤثرات يسرى .

وإن كان a عنصراً من A و s عنصراً من S ، ورمزنا للعمليـــة الخارجية اليمنى بـ △ فإن العنصر △ ((a , s)) يسمى ناتج العملية △ على a , s ويرمز له بـ a △ s . ونتبـع مصطلحاً مماثلاً في حالة العملية الخارجية اليسرى .

هذا وتستخدم اسم عملية الضرب أحياناً للدلالة على العملية الخارجية ، وعندها يرمز الناتج بـ s . a (أو sa) في حـالة العمليـــة اليمنى ، و بـ a ، s (أو as) في حالة العملية اليسرى . ففي الحالة الأولى تسمى العملية الخارجية عملية ضرب من اليمين ، وتسمى عناصر المجموعـــة A مضاريب يمنى . أما في الحالة الثانية ، فتسمى العملية الخارجية عمليـة ضرب من اليسار ، وتسمى عندئذ عناصر المجموعة A مضاريب يسرى .

أمثـــلة :

٣٩ - ١ لتكن V مجموعة الأشعة الطليقة في الفراغ R^3 . إن حاصل ضرب عدد حقيقي a بعنصر $\vec{v}$ من V هو تعريفاً شعاع طليق يرمز له بـ $a\vec{v}$. وبالتالي فان ضرب عدد حقيقي بشعاع طليق هي عملية ضرب من اليسار في S ، حيث تشكل R مجموعة مضاريب يسرى .

٤٠ - ١ لتكن E مجموعة ما ، ولنرمز بـ F(E , R) لمجموعة

تطبيقات E في R . لنعرف عملية ضرب عدد α من R بتابع f من F (E , R) بالدستور :

$$\forall x \in E \quad ; \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

بما أن كلا من $f(x)$, α ينتمي إلى R ، فان $\alpha f(x)$ عـدد حقيقي وبالتالي فان αf يمكننا من مقابلة كل عنصر x من F بعنصر من R ، أي أن αf عنصر من F (E , R) كذلك . لذا فان عمليـة الضرب المذكورة هي تطبيق لـ $R \times F(E,R)$ في F (E , R) ، وبالتالي فهي عملية ضرب من اليسار في F (E , R) ، حيث تشكل R مجموعة مضاريب يسـرى .

٤١ - ١ إذا قرأنا الجـدول (٤) بنفس طريقة قراءة جـداول العمليات الداخلية [٥ - ١] ، فان الجـدول (٤) العملية $\perp$ يعرف عملية خارجية يمنى $\perp$ على المجموعة $S = \{1, 2\}$ ، ساحة مؤثراتها اليمنى هي $A = \{a, b, c\}$.

$\perp$	a	b	c
1	1	2	1
2	2	2	1

جدول (٤)

٤٢ - ١ ملاحظة : يمكن اعتبـار العمليات الخارجية والداخلية (الثنائية) على أنها حالات خاصة من تطبيق $A \times B \to C$ ، حيث

C , B , A ثلاث مجموعات (مختلفة أو متساوية) :

(١) فاذا كان A = C ، غدا هذا التطبيق عملية خارجية يمنى في A ساحة مؤثراتها اليمنى B .

(٢) وإذا كان B = C ، أصبح هذا التطبيق عملية خارجية يسرى في B ساحة مؤثراتها اليسرى A .

(٣) وأخيراً ، إذا كان A = B = C ، فان هذا التطبيق ليس إلا عملية داخلية (ثنائية) على A .

هذا وواضح أن العملية الداخلية (الثنائية) ليست إلا عملية خارجية في A ساحة مؤثراتها المجموعة A نفسها .

البنى الجبرية :

لقد اعتبر الجبر حتى عهد ليس بالبعيد على أنه علم الحساب الرمزي : ففي حين تستعمل الاعداد في علم الحساب ، تستخدم في علم الجبر رموز تدل على الأعداد . ولكن الرياضيين لاحظوا بأن بعض العلاقات الرمزية من هذا « الحساب المعمم » والتي كانت صحيحة عند استبدال الأعداد بالرموز ، تبقى صحيحة عند استبدال « أشياء » أخرى بهذه الرموز ، مثل الأشعة والتوابع والمصفوفات وغيرها . وهكذا بدأ علم الجبر عهداً جديداً ، إذ غدا يدرس أنظمة رياضية يتألف كل منها من مجموعة عناصرها كيفية ، ومن عمليات معرفة على هذه المجموعات تشترك مع العمليات الحسابية المألوفة ببعض (وليس بجميع) الخواص . وقد أطلق على هذه الأنظمة الرياضية اسم **البنى الجبرية** .

٤٣ - ١ **تعريف** : البنية الجبرية S هي مجموعة $S = \{E, O, A\}$ مؤلفة من مجموعة غير خالية من العناصر E ، ومن مجموعة O تتألف من عملية واحدة أو أكثر من العمليات الجبرية الداخلية والخارجية ، ومن مجموعة A من الخواص التي يجب أن تحققها المجموعتان E , O . تسمى **E** **دعامة** البنية S ، كما تسمى A **مبادىء** (**أو مسلمات**) البنية .

٤٤ - ١ **مثال** : المونوئيد (M, o) [٣١ - ١] هو بنية جبرية ، ذلك أنه يتألف من الدعامة M ، ومن العملية الثنائية o (وهي العملية الجبرية الوحيدة $O = \{o\}$) . أما A مجموعة مبادىء المونوئيد فهي مجموعة حاوية على شرطين : أولهما أن تكون العملية o تجميعية ، وثانيهما أن يوجد في M عنصر محايد بالنسبة لـ o .

ومن أهم البنى الجبرية التي سنعالجها في الفصول المقبلة من هذا الكتاب هي الزمرة ، وهي مجموعة مزودة بعملية داخلية واحدة ، والحلقة والحقل وكل منهما مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين ، والفراغ الشعاعي وهو مجموعة مزودة بعمليتين إحداهما داخلية والاخرى خارجية . وفي كل من هذه الحالات هنالك مبادىء يجب أن تحققها العمليات الجبرية .

هذا ويشار غالباً إلى البنية الجبرية بمجموعة مرتبة $(E, o, \triangle, T, \ldots)$ حيث E دعامة البنية ، $o, \triangle, T, \ldots$ العمليات الجبرية المعروفة على البنية والتي يجب أن تحقق مبادىء معينة . وعلى سبيل المثال ، فقد رأينا أنه يشار إلى المونوئيد بالزوج المرتب (M, o) ، حيث تحقق العملية o شرطين حددناهما قبل قليل .

البنى الرياضية :

تجدر بنا الاشارة إلى أن الرياضيات المعاصرة تمكنت من صياغة هدفها الأسامي والذي يتلخص بدراسة البنى الرياضية . والبنى الرياضية تنقسم عموماً إلى قسمين رئيسيين : البنى الجبرية والبنى التوبولوجية . فأما البنية الجبرية ، فهي ، كما رأينا ، مجموعة مزودة بعملية جبرية أو أكثر . ومع أننا لسنا بصدد دراسة البنية التوبولوجية إلا أننا نجيز لأنفسنا إيراد هذا التعريف المبسط وغير الدقيق : البنية التوبولوجية هي مجموعة مزودة بمعيار لقياس المسافة بين عناصرها .

ويتصدى لدراسة البنى الجبرية علم الجبر الذي يضيف إلى دراسة خواص هذه البنى البحث في التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى . أما البنى التوبولوجية فيتكفل بدراستها علم التوبولوجيا الذي يضيف إلى دراسة خواص هذه البنى معالجة التطبيقات من بنية توبولوجية إلى أخرى .

هذا وتبقى مجموعة E مجردة من البنية الرياضية ، طالما لم نعرف عليها عمليات جبرية أو توبولوجية ، أو علاقات بين عناصرها أو علاقات بين عناصرها وعناصر مجموعات أخرى . . . الخ . وبالعكس فمن الممكن أن نشكل على مجموعة واحدة E بنى رياضية مختلفة .

الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

ذكرنا عند تعريفنا للبنى الرياضية أن علم الجبر لا يكتفي بدراسة خواص البنى الجبرية ، بل يتعداها إلى دراسة التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى . وتلعب التطبيقات التي تسمى هومومورفيزماً دوراً على غاية من الأهمية في علم الجبر . وسنكتفي الآن بتعريف هذا النوع من

التطبيقات ودراسة خواصه في حالة مجموعات مزودة بعمليات داخلية فقط .

٤٥ - ١ **تعريف** : لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o ، F مجموعة مزودة بالعملية الداخلية * ، f تطبيقاً لـ E في F . تسمى f هومومورفيزماً لـ (E , o) في (F , *) إذا تحقق الشرط :

$$\forall a , b \in E \quad ; \quad f(a \circ b) = f(a) * f(b) \qquad (1)$$

ويطلق على المجموعة الجزئية f(E) من F والتي تتألف من عناصر F التي هي خيالات لجميع عناصر E اسم **الخيال الهومومورفي** لـ E . هذا وإذا كان f : E → F هومومورفيزماً ، عندئذ يسمى f :

(أ) **مونومورفيزماً** إذا كان f متبايناً .

(ب) **ابيمورفيزماً** إذا كان f غامراً .

(ح) **إيزومورفيزماً** إذا كان f تقابلاً (أي متبايناً وغامراً) .

كذلك يسمى **الهومورفيزم** لبنية في نفسها **إندومورفيزماً** ، كما يسمى الإيزومورفيزم لبنية على نفسها **أوتومورفيزماً** .

هذا وإذا كان كل من E , F مزودة بأكثر من عملية داخلية واحدة ، فاننا نسمي f : E → F هومومورفيزماً إذا قابل كل عملية o على E عملية واحدة (وواحدة فقط) * على F بحيث تحقق الشرط (1) من أجل كل زوج من العمليات الثنائية المتقابلة .

أمثـــلة :

٤٦ - ١ لتكن البنيتـان (N +) , (N , .) ، حيث + ، . هما

على الترتيب عمليتا الجمـــع والضرب المعروفتين . إن التطبيق f المعرف بالقاعدة $f(x) = 2^x$ هو هومومورفيزم لـ (+ , N) في (. , N) ، ذلك أن :

$$\forall n, m \in N \quad : \quad f(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m = f(n) \cdot f(m)$$

وإذا لاحظنا أن f متباين لأن :

$$f(n) = f(m) \Rightarrow 2^n = 2^m \Rightarrow n = m$$

فان f مونومورفيزم . ولا يمكن أن يكون f إيزومورفيزماً ، لأن f غير غامر (لماذا ؟) . كذلك ، فلا يمكن أن يكون f إندومورفيزماً ذلك أن البنيتين (+ , N) و (. , N) مختلفتـــان بسبب اختلاف العمليتين المعرفتين عليها (رغم تطابق دعامتيهما N) .

٤٧ - ١ لتكن S مجموعـة مزودة بالعملية الداخلية o ، ولنفرض وجود عنصر محايد e لـ o . إن التطبيق : $f: S \to S$ وفق الدستور $\forall x \in S : f(x) = e$ هو إندومورفيزم لـ (S , o) في نفسها ، ذلك أن :

$$\forall a, b \in S \quad : \quad f(a \, o \, b) = e = e \, o \, e = f(a) \, o \, f(b)$$

ومن السهل أن نلاحظ بأنه إذا حوت S أكثر من عنصر واحد ، فلا يمكن أن يكون f أوتومورفيزماً

٤٨ - ١ لتكن S مجموعـة مزودة بالعملية الداخلية o . إن التطبيق المطابق لـ S على نفسها هو أوتومورفيزم لـ S .

٤٩ - ١ لتكن + ، . عمليتين داخليتين معرفتين على المجموعـــة $S = \{a, b, c, d\}$ ، □ ، ▭ عمليتين داخليتين معرفتين على المجموعة $S' = \{o, 1\}$ ،

وذلك وفقاً لجداول العمليات التالية :

S

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

S′

□	0	1
0	0	1
1	1	0

▭	0	1
0	1	0
1	0	1

إن التطبيق $f : S \to S'$ المعرف كما يلي :

$$f(a) = 0 \quad , \quad f(c) = 0 \quad , \quad f(b) = 1 \quad , \quad f(d) = 1$$

هو ايمومورفيزم لـ $(S, +, .)$ على $(S', \square, \boxminus)$ ، الأمر الذي يمكننا التحقق منه بفحص الجداول . وعلى سبيل المثال :

$$f(a + b) = f(b) = 1 = 0 \ \square \ 1 = f(a) \ \square \ f(b) ,$$

$$f(a . b) = f(a) = 0 = 0 \boxminus 1 = f(a) \boxminus f(b) .$$

كذلك :

$$f(b + d) = f(c) = 0 = 1 \ \square \ 1 = f(b) \ \square \ f(d) ,$$

$$f(b . d) = f(d) = 1 = 1 \boxminus 1 = f(b) \boxminus f(d)$$

هذا ومن الواضح أن f لايمكن أن يكون إيزومورفيزماً (لماذا ؟) .

نظريات أساسية في الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

* ٥٠ - ١ **نظريه** : ليكن f هومومورفيزما لـ (E , o) في (F , ✱) . عندها تصح الدعاوى التالية :

(أ) الخيال الهومومورفي $\bar{E} = f(E)$ لـ E هو مجموعة جزئية مغلقة (مستقرة) من (F , ✱) .

(ب) إذا كانت العملية الداخلية o على E تجميعية ، فان العملية الداخلية ✱ المعرفة على $\bar{E}$ تكون تجميعية .

(حـ) إذا كانت العملية الداخلية o على E تبديلية ، فان العملية الداخلية ✱ المعرفة على $\bar{E}$ تبديلية .

(د) إذا كان e عنصراً محايداً في (E , o) ، فان $u = f(e)$ عنصر محايد في ($\bar{E}$, ✱) .

(هـ) إذا كان d , d′ عنصرين متناظرين في (E , o) ، فان خياليهما f(d) , f(d′) يكونان متناظرين في ($\bar{E}$, ✱) .

(و) إذا كان j , k عنصرين قابلين للمبادلة في (E , o) ، فان خياليهما f(j) , f(k) يكونان قابلين للمبادلة في ($\bar{E}$, ✱) .

البرهان : ليكن p , q , r أي ثلاثة عناصر من $\bar{E} = f(E)$. إذن هنالك ثلاثة عناصر (على الأقل) a , b , c من E بحيث :

$$f(a) = p \quad , \quad f(b) = q \quad , \quad f(c) = r$$

(أ) لما كان f هومومورفيزماً فان :

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b) = p * q$$

لكن $a \circ b$ عنصر من E (لأن o عملية داخلية على E) إذن $p * q$ عنصر من $\bar{E} = f(E)$.

(ب) بما أن العملية o تجميعية ، إذن $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

ومنه $f((a \circ b) \circ c) = f(a \circ (b \circ c))$. لكن f هومومورفيزم ، لذا فان :

$$f((a \circ b) \circ c) = f(a \circ b) * f(c) = (f(a) * f(b)) * f(c) =$$

$$= (p * q) * r$$

$$f(a \circ (b \circ c)) = f(a) * f(b \circ c) = f(a) * (f(b) * f(c)) =$$

$$= p * (q * r)$$

بالتالي فان $(p * q) * r = p * (q * r)$ ، أي أن العملية $*$ تجميعية على $\bar{E} = f(E)$.

(ح) $a \circ b = b \circ a \Rightarrow f(a \circ b) = f(b \circ a) \Rightarrow f(a) * f(b) =$

$$= f(b) * f(a) \Rightarrow p * q = q * p$$

(د) لما كان $a \circ e = e \circ a = a$ فرضاً ، فان :

$f(a \circ e) = f(e \circ a) = f(a)$. وبما أن f هومومورفيزم ، فان هاتين العلاقتين تؤديان إلى العلاقتين :

$$f(a) * f(e) = f(e) * f(a) = f(a)$$

و :

$$p * u = u * p = p$$

ولما كان p أي عنصر من $\bar{E}$ ، فان $u = f(e)$ هو عنصر محايد في $(\bar{E}, *)$

(ه) $d \circ d' = d' \circ d = e \Rightarrow f(d \circ d') = f(d' \circ d) = f(e)$

(لأن f هومومورفيزم) $\Rightarrow f(d) * f(d') = f(d') * f(d) = f(e)$

(استناداً الى د) $\Rightarrow f(d) * f(d') = f(d') * f(d) = u$

(وهو المطلوب) $\Rightarrow [f(d)]' = f(d')$

(و) $j \circ k = k \circ j \Rightarrow f(j \circ k) = f(k \circ j) \Rightarrow f(j) * f(k) =$

$= f(k) * f(j)$

٥١ - ١ يترتب على (و) أنه إذا كانت المجموعة E آبلية [١٢-١] فان خيالها الهومومورفي $\bar{E}$ يكون كذلك .

٥٢ - ١ نظرية : ليكن f هومومورفيزما لـ $(E, \top)$ في (F, τ) و g هومومورفيزماً لـ (F, τ) في $(H, \perp)$ فلذا رمزنا (كما هو الحال في الغالب) بـ o إلى عملية تركيب التطبيقات ، فان التطبيق المركب $g \circ f$ هومومورفيزم لـ $(E, \top)$ في $(H, \perp)$.

لدينا أياً كان a , b من E :

(استناداً إلى تعريف $g \circ f$) $(g \circ f)(a \top b) = g[f(a \top b)]$

(لأن f هومومورفيزم) $= g[f(a) \tau f(b)]$

(لأن g هومومورفيزم) $= g(f(a)) \perp g(f(b))$

(استناداً إلى تعريف $g \circ f$) $= (g \circ f)(a) \perp (g \circ f)(b)$

٥٣ - ١ نظرية : إذا كان f إيزومورفيزماً لـ (E, o) على $(F, *)$ ، فان f^{-1} إيزومورفيزم لـ $(F, *)$ على (E, o) .

البرهان : بما أن f إيزومورفيزم إذن f تقابل (أي تطبيق متباين وغامر) . وبالتالي فان التطبيق العكسي $f^{-1} : F \rightarrow E$ موجود ، كما أن f^{-1} تقابل (المرجع I) . إذن إذا افترضنا أن p , q أي عنصرين من F ، فهنالك عنصران **وحيدان** a , b من E بحيث : $f^{-1}(q) = b$ ، $f^{-1}(p) = a$. وعندها يكون $p = f(a)\ ,\ q = f(b)$. ولما كان f هومومورفيزما فان : $f(a \circ b) = f(a) * f(b) = p * q$. وبما أن f تقابل فانه يترتب على هذا :

$$f^{-1}(p * q) = a \circ b = f^{-1}(p) \circ f^{-1}(q)$$

وهذا يعني أن f^{-1} هومومورفيزم لـ (F , *) في (E , o) . ولكن f^{-1} تقابل أيضاً ، إذن f^{-1} إيزومورفيزم لـ (F , *) على (E , o) .

٥٤ - ١ **نظرية** : إذا كانت S مجموعة كل المجموعات المزود كل منها بعملية داخلية ، وعرفنا على S العلاقة التالية : « يوجد إيزومورفيزم لـ (E , o) على (F , *) » فان هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ في S .

البرهان : لنرمز للعلاقة السابقة بـ $(E , o) \approx (F , *)$

(١) إن العلاقة ≈ **منعكسة** . في الحقيقة :

$$\forall (E , o) \in S \quad : \quad (E , o) \approx (E , o)$$

ذلك أن التطبيق المطابق هو إيزومورفيزم لأي بنية (E , o) على نفسها (أي أوتومورفيزم لـ (E , o)) .

(٢) إن العلاقة ≈ **متناظرة** ، ذلك أنه إذا كان f إيزومورفيزماً

لـ (E, o) على $(F, *)$ ، فاستناداً إلى [٥٣ - ١] يكون f^{-1} إيزومورفيزماً لـ $(F, *)$ على (E, o) .

(٣) إن العلاقة متعدية ، أي أن :

$$(E, o) \approx (H, \top) \ , \ (H, \top) \approx (F, *) \Rightarrow (E, o) \approx (F, *)$$

ذلك أنه لو فرضنا f إيزومورفيزماً لـ (E, o) على $(H, \top)$ ، g إيزومورفيزماً لـ $(H, \top)$ على $(F, *)$ ، فان كلا من f, g تقابل ، وبالتالي فان $g \circ f$ تقابل . فاذا أخذنا إلى ذلك أن $g \circ f$ هومومورفيزم لـ (E, o) في $(F, *)$ استناداً إلى [٥٢ - ١] ، وجدنا المطلوب .

٥٥ - ١ من الجدير بالذكر أن الايزومورفيزم من أهم المفاهيم التي أتى بها الجبر المجرد . فإذا كانت البنيتان الجبريتان $(E, \top), (F, \tau)$ إيزومورفيتين ، فمن الممكن اعتبارهما متطابقتين ، ذلك أن كل ماتختلف به إحداهما عن الأخرى هي رموز عناصرها ، وربما اسم العمليات المعرفة عليها . والايزومورفيزم يمكننا من معرفة ناتج عملية على عناصر إحدى البنيتين دون إجراء الحساب في هذه البنية ، وإنما باجراء الحسابات في البنية الأخرى ، والتي قد تكون أيسر وأسرع .

ويمكن تشبيه الايزومورفيزم بقاموس يمكننا من التحقق من أن جملة ما في إحدى اللغات تقابل جملة لها نفس المعنى في لغة أخرى ؛ إلا أن حالنا مع الايزومورفيزم ليس على هذه الدرجة من السهولة : فليس الغاية القول ما إذا كانت بنية جبرية إيزومورفية مع أخرى ، بقدر ما هي

تحديد الايزومورفيزم نفسه . واكتشاف الايزومورفيزم أمر غالباً مايكون غاية فى الصعوبة ، ولكن ربما كان الشعور بالرضا والغبطة عند اكتشاف هذه العلاقة شبيه لما يعانيه موسيقي أبدع لحناً جميلا من أنغام تبدو لغيره وكأنها متنافرة ليس بينها أي تناسق أو انسجام .

تمارين محلولة

١ - لتكن $\perp$ عملية داخلية على N معرفة بالقاعــدة :

$a \perp b = a^2 + b^2$.

(١) احسب :

$$2 \perp 1 \quad , \quad 5 \perp 3 \quad , \quad (3 \perp 1) \perp 5 \quad , \quad 3 \perp (1 \perp 5)$$

(٢) بين ما إذا كانت العملية $\perp$ تجميعية أو تبديلية .

(٣) هل هنالك عنصر محايد لـ $\perp$ ؟

(٤) إذا عرفنا $a^{(n)}$ ($n \geq 1$) كما يلي : $a^{(1)} = a$

و $a^{(n)} = a^{(n-1)} \perp a$ ، فاحسب $a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$.

الحل : (١)

$$2 \perp 1 = 2^2 + 1^2 = 5 \quad , \quad 5 \perp 3 = 5^2 + 3^2 = 34$$

$$(3 \perp 1) \perp 5 = (3^2 + 1^2) \perp 5 = 10 \perp 5 = (10)^2 + 5^2 = 125$$

$$3 \perp (1 \perp 5) = 3 \perp (1^2 + 5^2) = 3 \perp (26) = 3^2 + (26)^2 = 685$$

(٢) إن العملية $\perp$ تبديلية لأن :

$$\forall a, b \in N \qquad a \perp b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b \perp a$$

لكن $\perp$ غير تجميعية لأنه (على الأقل)

$$(3 \perp 1) \perp 5 \neq 3 \perp (1 \perp 5)$$

(٣) لا يوجد عنصر محايد في N لـ $\perp$ ، ذلك أنه لو افترضنا وجود

هـذا العنصر ورمزنا له بـ e ، فيجب أن يتحقق الشرط $x \perp e = x$ أياً كان x من N . ولكن $x \perp e = x^2 + e^2$ ، إذن يجب أن يتحقق $x^2 + e^2 = x$ أو $e^2 = x - x^2$ أياً كان x من N . ولكن هذا مستحيل لأن الطرف الأيسر e^2 من المساواة $e^2 = x - x^2$ يجب أن يكون ثابتاً (لأن e عنصر محدد من N) ، بينما الطرف الأيمن $x - x^2$ يتغير بتغير x (لماذا ؟) . إذن لا وجود في N لعنصر محايد e بالنسبة لـ $\perp$.

(٤) لدينا :

$$a^{(2)} = a^{(1)} \perp a = a \perp a = a^2 + a^2 = 2a^2 .$$

$$a^{(3)} = a^{(2)} \perp a = (2a^2) \perp a = (2a^2)^2 + a^2 = 4a^4 + a^2$$

$$a^{(4)} = a^{(3)} \perp a = (4a^4 + a^2) \perp a = (4a^4 + a^2)^2 + a^2 =$$

$$= 16a^8 + 8a^6 + a^4 + a^2 .$$

٢ ـ لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية المزودة بعملية الرفع إلى القوة (التي نرمز لها بـ $\top$) والمعرفة بالقاعدة :

$$\forall a \in N \quad : \quad a \top 0 = a^0 = 1$$

$$\forall (a, b) \in N \times N^* \quad : \quad a \top b = a^b$$

(١) احسب :

$$1 \top 1 \quad , \quad 2 \top 3 \quad , \quad 3 \top 2 \quad , \quad (2 \top 3) \top 5 \quad , \quad 2 \top (3 \top 5)$$

(٢) هل العملية الداخلية $\top$ تجميعية ؟ وهل هي تبديلية ؟

(٣) هل يوجد عنصر محايد أيمن ، أو محايد أيسر ، أو محايد بالنسبة لـ $\top$ ؟

(٤) هل العملية الداخلية ⊤ توزيعية بالنسبة لعملية الضرب العادية ؟

الحل : (١)

$$1 \top 1 = 1^1 = 1 \quad , \quad 2 \top 3 = 2^3 = 8 \quad , \quad 3 \top 2 = 3^2 = 9$$

$$(2 \top 3) \top 5 = 2^3 \top 5 = 8 \top 5 = 8^5 \quad ,$$

$$2 \top (3 \top 5) = 2 \top 3^5 = 2 \top 243 = 2^{243}$$

(٢) لو كانت ⊤ تجميعية لتحقق الشرط : $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$ أياً كان a , b , c من N . ولكننا رأينا في (١) أن $(2 \top 3) \top 5 \neq$ $2 \top (3 \top 5)$ ، وبالتالي فان العملية الداخلية ⊤ غير تجميعية .

كذلك فان ⊤ غير تبديليـة ، إذ لو كانت كذلك ، لتحقق الشرط $a \top b = b \top a$ أياً كان a , b من N . ولكننا رأينـا في (١) أن $2 \top 3 \neq 3 \top 2$ ، إذن ⊤ غير تبديلية .

(٣) إن شرط وجــــود عنصر محايد أيمن e هو $a \top e = a$ أي $a^e = a$ أياً كان a من N . ومن الواضح أن هذا يتم عندما تكون $e = 1$. إذن العدد 1 هو عنصر محايد أيمن لـ ⊤ .

ولو وجد عنصر محايد أيسر u ، لكان $u \top a = a$ أو $u^a = a$ أياً كان a من N . وهذا يقتضي المساواة $u^0 = 0$. ولما كان الفرض ينص على أن $u^0 = 1$ أياً كان u من N ، فاننا نجد $0 = 1$ ، وهذا مستحيل . وبالتالي فلا وجود لعنصر محايد أيسر لـ ⊤ .

هذا ، وبما أن العنصر المحايد لـ ⊤ هو عنصر محايد أيمن وأيسر في آن واحد ، فلا وجود لعنصر محايد بالنسبة لـ ⊤ .

(٤) إن شرط كون العملية $\top$ توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الضرب أن يتحقق الشرط :

$$a \top (b\,c) = (a \top b)(a \top c)$$

أو :

$$a^{bc} = a^b a^c = a^{b+c}$$

أياً كانت a, b, c من N . ولكن هذه المساواة غير محققة دوماً : فلو فرضنا مثلاً $a = 2\ ,\ b = 1\ ,\ c = 0$ فاننا نجد $a^{bc} = 2^0 = 1$ ، بينما $a^b a^c = 2^1 . 2^0 = 2 . 1 = 2$. وبالتالي فان العملية $\top$ غير توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الضرب .

لكن $\top$ توزيعية من اليمين بالنسبة لعملية الضرب ، ذلك أن :

$$\forall a \in N^*, \forall b, c \in N \ :\ (b\,c) \top a = (b\,c)^a = b^a c^a = (b \top a)(c \top a)$$

$$\forall b, c \in N \ :\ (b\,c) \top 0 = 1 = 1 . 1 = (b \top 0)(c \top 0)$$

ومع ذلك فان العملية $\top$ ليست توزيعية بالنسبة لعملية الضرب العادية ، لأنها غير توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الضرب .

٣ـ لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية التجميعية $\top$ ، ولنفرض a عنصراً مثبتاً من E . لنزود E بعملية داخلية أخرى * بحيث يقابل كل زوج (x, y) من $E \times E$ العنصر التالي من E :

$$x * y = x \top a \top y$$

(١) بين أن العملية * تجميعية .

(٢) بين أنه إذا كانت العملية $\top$ تبديلية ، فإن * تكون كذلك .

الحل : (١) إن $*$ تجميعية ، لأنه أياً كان x , y , z من E :

$$(x * y) * z = (x \top a \top y) * z = (x \top a \top y) \top a \top z$$

$$x * (y * z) = x * (y \top a \top z) = x \top a \top (y \top a \top z)$$

ولما كان الطرفان الأيمنان متساويين (لأن العملية $\top$ تجميعية) ، فإن الطرفين الأيسرين متساويان ، أي أن العملية $*$ تجميعية .

(٢) لنفرض العملية $\top$ تبديلية (بالاضافة إلى كونها تجميعية) عندئذ :

$$\forall x , y \in E \ : \ x * y = x \top a \top y = (x \top a) \top y = (a \top x) \top y =$$

$$= a \top (x \top y) = a \top (y \top x) = (a \top y) \top x =$$

$$= (y \top a) \top x = y \top a \top x = y * x$$

وبالتالي فإن العملية الداخلية $*$ تبديلية .

٤ ـ لتكن $\div$ عملية داخلية على المجموعة S ، ونفرض أن $\div$ تجميعية وليست تبديلية ، وأنها تقبل عنصراً محايداً أيمن e ، وأن لكل عنصر a من S نظيراً أيمن a' بالنسبة لـ $\div$. نرمز بـ a'' لنظير a' الأيمن بالنسبة لـ $\div$.

(١) برهن أن $a' \div a = e$ ، وذلك بحساب الناتج $a' \div a \div a' \div a''$ بطريقتين مختلفتين :

(٢) برهن أن $e \div a = a$ ، وذلك بحساب $a \div a' \div a$ بطريقتين مختلفتين .

الحل : (١) لدينا :

$a' \div a \div a' \div a'' = a' \div (a \div a') \div a''$ (لأن $\div$ تجميعية)

$= a' \div e \div a''$ (a' نظير أيمن لـ a)

$= (a' \div e) \div a''$ (لأن $\div$ تجميعية)

$= a' \div a''$ (e عنصر محايد أيمن)

$= e$ (a'' نظير أيمن لـ a')

ولدينا من جهة أخرى :

$$a' \div a \div a' \div a'' = a' \div a \div (a' \div a'') = a' \div a \div e$$

$$= a' \div (a \div e) = a' \div a$$

لذا فإن : $a' \div a = e$.

(٢) لدينـــا

$$a \div a' \div a = (a \div a') \cdot a = e \div a$$

ولدينا من جهة أخرى .

$$a \div a' \div a = a \div (a' \div a)$$

$= a \div e$ (استناداً إلى «١»)

$= a$ (e عنصر محايد أيمن)

وبالتالي فإن $e \div a = a$.

ملاحظة : نستنتج أنه إذا كانت الشروط الواردة في المسألة (٤) محققة ، فإنه يوجد عندئذ عنصر محايد e لـ ÷ ، كما يوجد لكل عنصر a من E نظير 'a بالنسبة لـ ÷ .

٥ـ لتكن E مجموعة تحوي أكثر من عنصر واحد ، ولتكن F مجموعة تطبيقات E في نفسها ، ولنفرض أن F مزودة بعملية تركيب التطبيقات o التي تقابل كلّ زوج f , g من F بمركبها fog .

(١) بين أن العملية الداخلية o ليست تبديلية .

(٢) عين العناصر المنتظمة في (F , o) .

الحل : (١) لما كانت في المجموعة E أكثر من عنصر واحـــد ، فيمكن أن نختار فيها عنصرين مختلفين a , b . لنختر تطبيقين ثابتين r , s لـ E في E معرفين كما يلي :

$$\forall x \in E \quad : \quad r(x) = a \quad , \quad s(x) = b .$$

من الواضح أنه أياً كان x من E :

$$(r \circ s)(x) = r(s(x)) = r(b) = a ,$$

$$(s \circ r)(x) = s(r(x)) = s(a) = b ,$$

ولما كان $a \neq b$ ، فان العنصرين r , s من F غير قابلين للمبـــادلة ($r \circ s \neq s \circ r$) ، وبالتالي فان العملية o غير تبديلية .

(٢) كي يكون f من F عنصراً منتظماً يلزم ويكفي أن يتحقق الشرطان:

أولاً :

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h ,$$

أي :

$$\forall x \in E \quad : \quad f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow g(x) = h(x)$$

وبالتالي فان الشرط الأول يتلخص في أن يكون f متبايناً .

ثانياً :

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

أي :

$$\forall x \in E \quad : \quad g(f(x)) = h(f(x)) \Rightarrow g(x) = h(x) \qquad (*)$$

وكي يتحقق هـذا الاقتضاء مهما كان g , h يلزم ويكفي أن يكون

f غامراً : فإذا كان f غامراً فان f(x) يمكن أن يساوي أي عنصر من E ، وبالتالي فليست $g(f(x)) = h(f(x))$ هي إلا المساواة $g(x) = h(x)$ (أيا كان x من E) . وبالعكس ، فاذا تحقق الاقتضاء (*) ، كان f غامراً ، لأنه لو لم يكن f كذلك ، لترتب على المساواة $g(f(x)) = h(f(x))$ تساوي g, h في f(E) التي لا تساوي E (لأن f غير غامر) . وعندها يمكن لـ g, h أن يكونا مختلفين على E − f(E) ، وهذا مخالف لـ (*) الذي يقضي بتساوي g, h على المجموعة E بأكملها .

نستنتج مما سبق أن الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق f عنصراً منتظماً في (F , o) هو أن يكون f متبايناً وغامراً (أي تقابلاً) .

ملاحظة : سنتناول في الفصل الثالث بالتفصيل دراسة مجموعة التطبيقات المتباينة والغامرة لمجموعة E على نفسها .

٦ ـ لتكن S مجموعة الأعداد الطبيعية { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } ، ولنعرف على S عملية ⅃ محددة بالقاعدة :

$$\forall a , b \in S \quad : \quad a \,⅃\, b = \min (a , b)$$

(min (a , b) تعني أصغر العددين a , b) . برهن أن (S , ⅃) هو مونوئيد آبلي :

الحل : (١) من الواضح أن ⅃ هي عملية داخلية على S ، لأنها قاعدة تمكننا من مقابلة كل زوج مرتب (a , b) من عناصر S بعنصر وحيد من S هو أصغر العددين a , b الذي ينتمي وضوحاً إلى S .

(٢) إن $\lrcorner$ عملية تجميعية ، ذلك أنه أيا كان a, b, c من S :

$$a \lrcorner (b \lrcorner c) = a \lrcorner \min(b, c) = \min(a, \min(b, c)) =$$
$$= \min(a, b, c)$$

$$(a \lrcorner b) \lrcorner c = \min(a, b) \lrcorner c = \min(\min(a, b), c) =$$
$$= \min(a, b, c)$$

(٣) إن العـــدد 5 هو عنصر محايد في S ، ذلك أنه أيا كان a من S فإن :

$$5 \lrcorner a = \min(5, a) = a$$
$$a \lrcorner 5 = \min(a, 5) = a$$

وهكذا فإن $(S, \lrcorner)$ مونوئيد . وهذا المونوئيد آبلي لأن :

(٤) $\forall a, b \in S : a \lrcorner b = \min(a, b) = \min(b, a) = b \lrcorner a$

٧- لتكن E مجموعة العناصر المنتظمة في المجموعة S المزودة بالعملية الداخلية التجميعية $+$. برهن أن E مجموعـــة جزئية مغلقة (مستقرة) بالنسبة لـ $+$.

الحل : ليكن a, b أي عنصرين من E و x, y عنصرين من S يحققان المساواة :

$$(a + b) + x = (a + b) + y$$

لدينـــا :

$$(a + b) + x = (a + b) + y$$

$\Rightarrow a + (b + x) = a + (b + y)$ (العملية $+$ تجميعية)

$\Rightarrow b + x = b + y$ (a منتظم)

(b منتظم)   (1) $\Rightarrow x = y$

ونترك القارىء التثبت من صحة الاقتضاء

(2) $x + (a + b) = y + (a + b) \Rightarrow x = y$

إن (1) , (2) يثبتان أنه أيا كان العنصران المنتظمان a , b من E ، فإن a + b عنصر منتظم ، أي أن a + b عنصر من E كذلك . وبالتالي فإن E مجموعة جزئية مغلقة بالنسبة لـ + .

٨- لنرمز بـ F(R , R) لمجموعة التطبيقات $f : R \to R$. لنعرف « حاصل ضرب » عنصرين f , g من F بأنه تابع fg معرف بالقاعدة :

$$\forall x \in R \quad : \quad (f g) (x) = f (x) \ g (x)$$

والمطلوب اثبات وجود عنصر محايد بالنسبة لعملية الضرب وتعيين هذا العنصر . عين بعـــد ذلك العناصر المنتظمة ، والعناصر القابلة للمناظرة بالنسبة للعملية المفروضة .

الحل : كيما يوجـد عنصر محايد I في F ، يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall f \in F \quad : \quad f I = I f = f$$

وهكذا يجب أن يكون :

$$(f I) (x) = (I f) (x) = f (x)$$

أو :

$$f (x) I (x) = I (x) f (x) = f (x)$$

أيا كان f من F و x من R . ومن السهل التأكد أنه عندئذ يكون :

$I(x)=1$. وبالتالي فإن العنصر المحايد في F هو التطبيق الثابت $I: R \to R$ بحيث $I(x)=1$ أياً كان x من R .

ونترك للقارىء التأكد من أن مجموعة العناصر المنتظمة في F هي :

$$E = \{f \mid f \in F(R, R) \quad \text{و} \quad f(x) \neq 0\}$$

ومن أن مجموعة العناصر القابلة للمناظرة في F هي F نفسها .

٩ - ليكن a , b عددين حقيقيين مفروضين ، $\top$ عملية داخلية على R معرفة بالقاعدة :

$$\forall x, y \in R \quad : \quad x \top y = a x + b y$$

عين الشروط التي يجب أن يحققها a , b كي تكون العملية $\top$:

(١) تجميعية . (٢) تبديلية .

الحل : (١) لدينا :

$$(x \top y) \top z = (a x + b y) \top z = a (a x + b y) + b z =$$
$$= a^2 x + a b y + b z$$

$$x \top (y \top z) = x \top (a y + b z) = a x + b (a y + b z) =$$
$$= a x + b a y + b^2 z$$

وكي تكون $\top$ تجميعية ، يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall x, y, z \in R \quad : \quad a^2 x + a b y + b z = a x + b a y + b^2 z$$

وبالتالي فيجب أن تتحقق المطابقة :

$$\forall x, z \in R \quad : \quad a (a - 1) x + b (1 - b) z = 0$$

التي تقتضي المعادلتين (لماذا ؟) :

$$a(a-1)=0 \quad , \quad b(1-b)=0$$

إن لجملة هاتين المعادلتين أربعة حلول هي :

$$(1)\quad a=b=0 \quad , \quad (2)\quad a=b=1 \quad , \quad (3)\quad a=1 , b=0 \quad ,$$
$$(4)\quad a=0 , b=1$$

وبالتالي فإن العملية $\top$ المعرفة في كل من الدساتير التالية هي عملية داخلية تجميعية على R :

$$(1')\quad x \top y=0 \quad , \quad (2')\quad x \top y=x+y \quad , \quad (3')\quad x \top y=x \; ;$$
$$(4')\quad x \top y=y$$

(٢) كيما تكون العملية $\top$ تبديلية ، يلزم ويكفي أن يتحقق الشرط :

$$\forall x , y \in R \quad : \quad x \top y=y \top x$$

وهذا الشرط يكافىء :

$$\forall x , y \in R \quad : \quad (a-b)x=(a-b)y$$

وكي يتحقق هذا الشرط ، يلزم ويكفي أن يكون $a-b=0$ أي $a=b$ (لماذا ؟) . وبالتالي فإن العملية التبديلية الوحيدة $\top$ هي :

$$x \top y=ax+ay$$

وذلك أيا كان a من R .

• ١ - لتكن S مجموعة مزودة بالعملية الداخلية التجميعية $\perp$ ، ولنفترض f_a ، g_a تطبيقين لـ S في S معرفين بالدستورين : $f_a(x)=a \perp x$ و $g_a(x)=x \perp a$ ،

حيث a عنصر من S . أثبت أن :

$$f_{a \perp b} = f_a \circ f_b \quad , \quad g_{a \perp b} = g_b \circ g_a$$

وذلك بفرض o عملية تركيب تطبيقات S في S .

الحل : لدينا أيا كان العنصر x من S :

$f_{a \perp b}(x) = (a \perp b) \perp x$ (تعريفاً)

$= a \perp (b \perp x)$ (العملية $\perp$ تجميعية)

$= f_a (b \perp x)$ (وفق تعريف f_a)

$= f_a (f_b (x))$ (وفق تعريف f_b)

$= (f_a \circ f_b)(x)$ (وفق تعريف o)

لكن المساواة $f_{a \perp b}(x) = (f_a \circ f_b)(x)$ أيا كان x من S تعني أن $f_{a \perp b} = f_a \circ f_b$. هذا ونترك للقارىء أمر إثبات صحة المساواة الثانية .

١١ - ليكن (M , O) مونوئيداً عنصره الحايد e ، a عنصراً من M .
أثبت أنه إذا كان a قابلاً للمبادلة مع b ، وكان لـ a نظير a′ ، فإن a′ يكون قابلاً للمبادلة مع b .

الحل : لما كان $a' O a = a O a' = e$ ، فإن

$$b\, O\, (a\, O\, a') = (a\, O\, a')\, O\, b \qquad (*)$$

وبما أن العملية O تجميعية ، فإن الطرف الأيمن من (*) يساوي $a\, O\, (a'\, O\, b)$ ، كما أن الطرف الأيسر من (*) هو :

$b\, O\, (a\, O\, a') = (b\, O\, a)\, O\, a'$ (العملية O تجميعية)

$= (a\, O\, b)\, O\, a$ (a قابل للمبادلة مع b)

$= a \, O \, (b \, O \, a')$ (العملية O تجميعية)

وهكذا فإن المساواة (*) تقتضي المساواة .

$$a \, O \, (b \, O \, a') = a \, O \, (a' \, O \, b)$$

التي يترتب عليها استناداً إلى [٣٤ - ١] المســاواة $b \, O \, a' = a' \, O b$ ، التي تعني أن a' قابل للمبادلة مع b .

١٢ - ليكن (E , o) مونوئيداً ، a عنصراً من E . برهن أن المجموعة A التي كل من عناصرها قابل للمبادلة مع a مغلقة بالنسبة لـ o .

الحل : نلاحظ قبل كل شيء أن العنصر الحايد e لـ o قابل المبادلة مع a ، لذا فإن $A \neq \Phi$. بعدئذ نرى أن :

$\forall x , y \in A \;:\; a \, o \, (x \, o \, y) = (a \, o \, x) \, o \, y$ (العملية o تجميعية)

$= (x \, o \, a) \, o \, y$ ($x \in A$)

$= x \, o \, (a \, o \, y) = x \, o \, (y \, o \, a) = (x \, o \, y) \, o \, a$ (o تجميعية و $y \in A$)

وبالتالي فإننا نرى أنه إذا كان x , y أي عنصرين من A فإن $x \, o \, y$ عنصر من A ، أي أن المجموعة الجزئية A من E مغلقة بالنسبة لـ o .

١٣ - لتكن $S = \{ (x , y) : x , y \in R \}$ ، ولنعرف العملية التالية :

$$\forall a , x , y \in R \;:\; a \, (x , y) = (a \, x , a \, y)$$

ما نوع هذه العملية ؟

الحل : إن هذه العملية تطبيق لـ $R \times S$ في S ، وبالتالي فهي عملية جبرية خارجية يسرى (قانون تشكيل خارجي أيسر) في S ، وساحة المؤثرات اليسرى لهذه العملية هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

١٤ - لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية $\perp$ ، ولنقابل كل عنصر a من E بتطبيقين لـ E في E :

$$f_a : x \rightarrow x \perp a \quad / \quad g_a : x \rightarrow a \perp x$$

(١) ماذا تعني العلاقتان $f_a = g_a = i\,d_E$ بالنسبة لـ a ؟ (id_E هو التطبيق المطابق لـ E على E) .

(٢) ماهو الشرط الذي يجب أن تحققه $\perp$ حتى يكون :

$$\forall a \in E \; : \; f_a = g_a$$

(٣) برهن أنه إذا كان $(E, \perp)$ مونوئيداً ، وكان العنصر a نظير a' بالنسبة لـ $\perp$ ، فإن كلا من f_a , g_a يكون تقابلًا (أي تطبيقاً متبايناً وغامراً) .

(٤) ماهو نوع العنصر a إذا كان كل من التطبيقين f_a , g_a متبايناً ؟

(٥) لنفرض الآن أن العملية $\perp$ تجميعية وتبديلية . بين أنه إذا وجد عنصر a من E بحيث يكون f_a تقابلًا ، فهنالك عنصر محايد لـ $\perp$ ، كما أن a يكون عندئذ قابلًا للمناظرة .

الحل : (١)

$$f_a = g_a = i\,d_E \Leftrightarrow \forall x \in E \; : \; f_a(x) = g_a(x) = i\,d_E(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E \; : \; x \perp a = a \perp x = x$$

وهذا يعني أن العنصر a الذي يحقق العلاقتين $f_a = g_a = i\,d_E$ هو عنصر محايد لـ $\perp$.

(٢)

$$\forall a \in E \ : \ f_a = g_a \iff \forall a, x \in E \ : \ f_a(x) = g_a(x)$$

$$\iff \forall a, x \in E \ : \ x \perp a = a \perp x$$

وهذا يعني أن الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\forall a \in E : f_a = g_a$ هو أن تكون العملية $\perp$ تبديلية .

(٣) إن f_a تطبيق متباين لأن :

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow x \perp a = y \perp a$$

$$\Rightarrow x = y$$ (استناداً إلى [٣٤-١])

كذلك فإن f_a تطبيق غامر ؛ ذلك أنه أيا كان العنصر b من E ، فهنالك عنصر (وحيد) x من E يحقق $x \perp a = b$ [٣٥ - ١] ، أو $f_a(x) = b$. وبالتالي فإن التطبيق f_a غامر أيضاً .

ولما كان f_a متبايناً وغامراً فهو تقابل . ويتم إثبات أن g_a تقابل بصورة مماثلة .

(٤) إذا كان كل من f_a , g_a متبايناً فإنه أيا كان x , y من E :

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow x = y \quad , \quad g_a(x) = g_a(y) \Rightarrow x = y$$

وبالتالي فإن :

$$x \perp a = y \perp a \Rightarrow x = y \quad , \quad a \perp x = a \perp y \Rightarrow x = y$$

لذا فإن a عنصر منتظم [٣٣ - ١] .

(ه) نفرض b عنصراً اختيارياً من E . لما كان f_a تطبيقاً متبايناً وغامراً لـ E على E فهنالك عنصر وحيد x من E بحيث $f_a(x) = b$ أو $x \perp a = b$. لنرمز بـ e للعنصر (الوحيد) من E الذي يحقق $e \perp a = a$. سنبرهن الآن على أن e عنصر محايد لـ $\perp$.

إذا أدخلنا في اعتبارنا أن $\perp$ تجميعية وتبديلية نجد :

$$e \perp b = e \perp (x \perp a) = e \perp (a \perp x) = (e \perp a) \perp x = a \perp x =$$

$$= x \perp a = b$$

ولما كان b عنصراً اختيارياً من E فإن e عنصر محايد أيسر لـ $\perp$. لكن العملية $\perp$ تبديلية ، إذن e عنصر محايد أيمن لـ $\perp$ ، وبالتالي عنصر محايد لـ $\perp$.

إن a قابل للمناظرة بالنسبة لـ $\perp$ ، ذلك أنه لما كان f تقابلاً ، فهنالك عنصر وحيد ، وليكن a' يحقق الشرط $f_a(a') = e$ ، أي $a' \perp a = e$. ولكن العملية $\perp$ تبديلية فرضاً ، إذن فالعنصر a' يحقق العلاقتين : $a' \perp a = a \perp a' = e$ ، وبالتالي فإن a' نظير لـ a بالنسبة لـ $\perp$.

١٥- لتكن E جموعة مزودة بعمليتين داخليتين + ، • ، ولنفرض وجود عنصرين محايدين e , ε لـ + و • على الترتيب . لنفرض كذلك أن

$$\forall x , y , u , v \in E \quad : \quad (x + y) . (u + v) = (x . u) + (y . v) \qquad (1)$$

(أ) إلام تؤول العلاقة (1) عندما $x = v = e \ , \ y = u = \varepsilon$ ؟

(ب) أثبت تطابق العمليتين + ، • .

(حـ) برهن على وجود خواص تبديلية وتجميعية .

الحل : (أ) إن العلاقة (1) تغدو في هذه الحالة :

$$(e + \varepsilon) . (\varepsilon + e) = (e . \varepsilon) + (\varepsilon . e)$$

لكن :

(e عنصر محايد لـ +) $\quad e + \varepsilon = \varepsilon + e = \varepsilon$

(ε عنصر محايد لـ .) $\quad e . \varepsilon = \varepsilon . e = e$

إذن تأخذ العلاقة (1) الشكل : $e + e = \varepsilon . \varepsilon$. ولما كان $\varepsilon . \varepsilon = \varepsilon$ و $e + e = e$ (لماذا ؟) فإن : العلاقة (1) تغدو مساواة بين العنصرين المحايدين e , ε .

(ب) إذا جعلنا في العلاقة (1) $y = u = \varepsilon$ ، فإنها تبقى صحيحة ، ونجد :

$$(x + \varepsilon) . (\varepsilon + v) = (x . \varepsilon) + (\varepsilon . v) \qquad (2)$$

ولكن استناداً إلى (أ) :

$$x + \varepsilon = x + e = x \quad ; \quad \varepsilon + v = e + v = v$$

وإذا لاحظنا فضلاً عن ذلك أن :

$$x . \varepsilon = x \quad , \quad \varepsilon . v = v$$

فإن العلاقة (2) تكتب كما يلي :

$$x . v = x + v$$

ولما كانت هذه المساواة صحيحة أياً كان x , v من E فإن العمليتين + ، . متطابقتان .

(حـ) إن تطابق العمليتين + ، . يسمح لنا بكتابة (1) على

النحو التالي :

$$(x + y) + (u + v) = (x + u) + (y + v) \qquad (3)$$

فلو وضعنا $y = e$ ، لوجدنا أن (3) (التي تبقى صحيحة) تغدو على الشكل :

$$x + (u + v) = (x + u) + v$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة فرضاً أيا كان x , y , v من E ،فإن العملية + (أو ∘) تجميعية .

أما لو وضعنا في (3) $x = v = e$ ، لوجدنا :

$$(e + y) + (u + e) = (e + u) + (y + e)$$

أو :

$$y + u = u + y$$

ولما كانت هذه المساواة صحيحة فرضاً أيا كان العنصران y , u من E ، فإن العملية + (أو ∘) تبديلية .

١٦ - ليكن f إيزومورفيزماً لـ $(E , \top)$ على $(E_1 , \top_1)$ ، a عنصراً منتظمــاً في $(E , \top)$. أثبت أن العنصر $a_1 = f(a)$ منتظم في $(E_1 , \top_1)$.

الحل : ليكن x_1 , y_1 عنصرين اختياريين من E_1 ، ولنفرض صحة المساواة $a_1 \top_1 x_1 = a_1 \top_1 y_1$. بما أن f إيزومورفيزم فهنالك عنصران (وحيـدان) x , y في E بحيث $x_1 = f(x)$, $y_1 = f(y)$. وهكذا نرى أن :

$$a_1 \top_1 x_1 = a_1 \top_1 y_1 \Leftrightarrow f(a) \top_1 f(x) = f(a) \top_1 f(y)$$

$\Leftrightarrow f(a \top x) = f(a \top y)$ (f إيزومورفيزم)

$\Leftrightarrow a \top x = a \top y$ (f متبـــاين)

$\Rightarrow x = y$ (a منتظم في E)

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x_1 = y_1$

وهكذا نكون قد وجدنا :

$$a_1 \top_1 x_1 = a_1 \top_1 y_1 \Rightarrow x_1 = y_1$$

ونجد بصورة مماثلة :

$$x_1 \top_1 a_1 = y_1 \top_1 a_1 \Rightarrow x_1 = y_1$$

وبالتالي فإن $a_1 = f(a)$ عنصر منتظم في E_1 .

١٧- ليكن f هومومورفيزما لـ $(E, \top)$ في $(E_1, \top_1)$ ، S مجموعة جزئية غير خالية من E ومغلقة (مستقرة) بالنسبة لـ $\top$ ولتكن S_1 مجموعة جزئية غير خالية من E_1 ومغلقة بالنسبة لـ $\top_1$.

(أ) برهن أن الخيال الهومومورفي f (S) هو مجموعة جزئية مغلقة في E_1 .

(ب) برهن أن الخيال العكسي $f^{-1}(S_1)$ حيث :

$$f^{-1}(S_1) = \{s \mid s \in S \quad \text{و} \quad f(s) \in S_1\}$$

هو مجموعة جزئية مغلقة في E .

(أ) انظر [٥٠ – ١] .

(ب) ليكن s_1, s_2 أي عنصرين من $f^{-1}(S_1)$ ؛ إذن $f(s_1), f(s_2)$ ينتميان إلى S_1 . ولما كانت S_1 مغلقة فرضاً بالنسبة لـ $\top_1$ ، فإن النّاتج

$f(s_1)\ T_1\ f(s_2)$ ينتمي إلى S_1 . وبما أن هـذا الناتج يساوي $f(s_1 \top s_2)$ (لأن f هومومورفيزم) ، فإن $f(s_1 \top s_2)$ ينتمي إلى S_1 . وبالتالي فإن $s_2 \top s_1$ عنصر من $f^{-1}(S_1)$ ، وهذا يثبت أن $f^{-1}(S_1)$ مجموعة جزئية مغلقة من E .

تمارين غير محلولة

١٨- لتكن o عملية معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بالقاعدة :

$$\forall a, b \in R \ : \ a o b = a + b - ab$$

برهن أن العملية o تبديلية وتجميعية . هل عملية الضرب توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية o ؟ .

١٩- اكتب كل جداول العمليات الداخلية على المجموعة $S = \{x,y\}$ ، وعين ما كان منها تبديلياً أو تجميعياً .

٢٠- هل الطرح عملية داخلية على كل من المجموعات الآتية ولماذا ؟

(١) مجموعة الأعداد الصحيحة .

(٢) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة .

(٣) مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على 3 ؟

٢١- هل عملية الضرب توزيعية من اليسار بالنسبة للطرح من أجل مجموعة الأعداد الحقيقية . اعط بعض الأمثلة لتوضيح ذلك .

٢٢- إذا رمزنا بـ m لعملية المضاعف المشترك البسيط (مثلاً $6 m 15 = 30$) . بين ما إذا كانت هذه العملية تبديلية أو تجميعية ، ثم برهن أن m غير توزيعية من اليسار بالنسبة لعملية الجمع العادية .

٢٣- لتكن $\llcorner$ عملية داخلية معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث

$$\forall a, b \in R \ : \ a \llcorner b = \max(a, b)$$

[$max(a , b)$ تعني أكبر العددين (a , b)] . بين ما إذا كانت العملية ⊥ تبديلية ، وهل هي توزيعية من اليمين بالنسبة لعملية الجمع ؟

٢٤- لتكن o عملية داخلية معرفة على مجموعة E . بين ما إذا كانت هذه العملية تجميعية أو تبديلية ، ثم ادرس وجود عنصر محايد لـ o ، ووجود عناصر قابلة للمناظرة بالنسبة لـ o في كل من الحالات الآتية :

(١) $E = N^*$ ، $\forall x , y \in N^* \;:\; x \circ y = x^y$

(٢) $E = R$ ، $\forall x , y \in R \;:\; x \circ y = x + 2y$

(٣) E هي مجموعة الأشعة الطليقة V , o هي عملية جمع الأشعة الطليقة .

(٤) $E = \{ + , - \}$, o هي قاعدة ضرب الاشارات :

$$+ \circ + = + \;,\; + \circ - = - \;,\; - \circ + = - \;,\; - \circ - = +$$

(٥) $E = N \times N$ ، o هي العملية :

$$\forall x , y , x_1 , y_1 \in N \;:\; (x , y) \circ (x_1 , y_1) = (x + x_1 , y + y_1)$$

٢٥- من الممكن أن ترتبط عمليتان داخليتان ⊥ , ∗ على مجموعة E بالعلاقة التالية :

$$\forall x , y , z \in E \;:\; (x \perp y) * z = x \perp (y * z)$$

اعط مثالاً على ذلك .

٢٦- تحقق أن العملية □ على المجموعة $\{p , q , r , s\}$ الممثلة بالجدول المجاور هي تجميعية وتبديلية . بين كذلك وجود عنصر محايد لـ □ ، وأن لكل عنصر نظيراً بالنسبة لـ □ .

	p	q	r	s
p	p	q	r	s
q	q	r	s	p
r	r	s	p	q
s	s	p	q	r

٢٧- أوجد عملية داخلية على مجموعة مؤلفة من عنصرين a , b بحيث تكون هذه العملية تجميعية وغير تبديلية .

ثم أوجد على هذه المجموعة عملية تبديلية وليست تجميعية

٢٨- نعرف على $E = \{a, b, c\}$ عملية ضرب وفق ما يلي :

$$a^2 = a \;,\; b^2 = b \;,\; c^2 = c \;,\; bc = cb = a \;,\; ca = ac = b \;,$$
$$ab = ba = c$$

برهن أن هذه العملية الداخلية التبديلية غير تجميعية .

٢٩- لتكن * عملية داخلية على المجموعة S ، ولنفرض وجود عنصر محايد e لـ * . برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون العملية تجميعية وتبديلية هو أن تتحقق الخاصة التالية :

$$\forall a, b, c, d \in S \;:\; (a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

٣٠- إذا كانت T عملية داخلية تجميعية على مجموعة E ، فأثبت صحة ما يلي :

$$\forall a, b, c, d, f \in E \quad : \quad (((a \top b) \top c) \top d) \top f =$$
$$= a \top (b \top c) \top (d \top f))$$

٣١- نقول عن عملية داخلية O على مجموعة S ، إنها قابلة للقلب إذا تحقق الشرط التالي :

اذا كان العنصران a , b من S ، فهنالك عنصران r , s من S بحيث يكون : a O r = s O a = b . أوجد عملية داخلية قابلة للقلب على المجموعة S = { a , b , c , d } .

ما هي الخاصة المميزة التي يتمتع بها جدول هذه العملية .

٣٢- لتكن F مجموعة تطبيقات المجموعة E في نفسها . هل يمكنك تصور عملية خارجية في E ساحة مؤثراتها F ؟

٣٣- لتكن E = { e , a , b , c } مجموعة مزودة بعملية ضرب ، e عنصر محايد لهذه العملية . ولنحدد هذه العملية بالعلاقات :

$$a^2 = b^2 = c^2 = e \;,\quad b\,c = c\,b = a \;,\quad c\,a = a\,c = b \;,\quad a\,b = b\,a = c$$

بين أن هـــذه العملية تبديلية وتجميعية ، وأن كل عنصر من E قابل للقلب .

٣٤- لتكن E مجموعة القطع المستقيمة من مستقيم ، N مجموعـــة الأعداد الطبيعية . هل يمكنك تحديد عملية خارجية في E ساحة مؤثراتها N ؟

٣٥- إن كل عنصر منتظم a في مجموعة E عليها عملية داخلية o ، يبقى منتظماً في أية مجموعة جزئية مغلقة بالنسبة لـ o . هل العكس صحيح؟

٣٦- لتكن E مجموعة مزودة بعملية داخلية ⊤ ، $n \in N^*$. بين أن

التطبيق المحدد بالقاعدة :

$$(n, a) \to \overset{n}{\top} a \quad , \quad \overset{1}{\top} a = a$$

يمثل عملية جبرية خارجية .

٣٧- لتكن $D = \{ 3^x \mid x \in N \}$. برهن أن التطبيق $f : N \to D$ المعرف بالقاعدة $f(x) = 3^x$ هو إيزومورفيزم لـ $(N, +)$ على $(D, .)$.

٣٨- لتكن المجموعة R المزودة بعمليتي الجمع والضرب ، ولنفرض

$$E = \{ x + y\sqrt{2} \mid x, y \in Q \}$$

(١) برهن أن E مغلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب .

(٢) بين أن لكل عنصر مغاير للصفر من E نظيراً بالنسبة لعمليتي الجمع ونظيراً آخر بالنسبة لعملية الضرب .

(٣) برهن أن البنية الجبرية $(E, +, .)$ إيزومورفية للبنية الجبرية $Q \times Q$ التي نعرف عليها عمليتين للجمع والضرب وفق القاعدتين :

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

$$(x, y)(x_1, y_1) = (x x_1 + 2 y y_1, x y_1 + y x_1)$$

(٤) إذا استعضنا في دراستنا هذه عن $\sqrt{2}$ بـ $\sqrt{d}$ $(d \in N^*)$ ، فما هو الشرط الذي يجب أن يحققه d حتى تبقى النتائج (١) – (٣) قائمة ؟

الفصل الثاني

الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة

١ - ٢ مجموعة الأعداد الطبيعية ومبادىء بيانو Peano : يعد العدد الطبيعي أول مفهوم رياضي أوجده الفكر البشري بسبب حاجته لتعداد الأشياء المحيطة به . ولقد درست خواص مجموعة الأعداد الطبيعية :

$$N = \{ 0 , 1 , 2 , \dots \}$$

بشكل حسي وحدسي منذ زمن قديم ثم أعطيت لهذه المجموعة بنية مجردة متاسكة انطلاقاً من مبادىء أساسية تسمى عادة « مبادىء بيانو »[1] نذكرها فيما يلي :

N_1 - الصفر (0) عدد طبيعي .

N_2 - لكل عدد طبيعي a عـدد طبيعي آخر وحيد يليه نرمز له بـ a^+ وبصورة خاصة تكتب : $1 = 0^+$.

وعلى العكس إذا كان $a \neq 0$ فإن هناك عـــدداً طبيعياً آخر يليه العـدد a .

---

(١) عالم رياضي ايتالي عاش بين ١٨٥٨ و ١٩٣٢ .

N_3 ـ لا يمكن أن يكون العدد الطبيعي ، الذي يلي عـدداً طبيعياً آخر ، صفراً .

N_4 ـ إذا ولي عدد طبيعي واحد عددين طبيعيين كانا متساويين .

N_5 ـ إذا كانت E مجموعة جزئية من N وحققت الشرطين .

$$0 \in E \quad , \quad (h \in E \Rightarrow h^+ \in E)$$

فإنه يكون $\qquad E = N$

٢ ـ ٢ تفسير مبادىء بيانو :

١ ـ يعرف المبدأ الأول عدداً طبيعياً نسميه صفراً فالمجموعة N مجموعة غير خالية إذ أنها تحوي على الأقل هذا العنصر .

٢ ـ يعطينا المبدأ الثاني طريقة لبناء هذه المجموعة اعتباراً من عنصرها الأول ـ الصفر ـ فهي مكونة من الصفر والأعـداد التي يمكن تكوينها بإيجاد عدد يلي عدداً من N . وينتج عن هذا أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية ، وأنه عندما نتابع تكوين الأعداد الطبيعية فسوف لن نقع على عدد سبق مروره (انظر التمرين ٣٩) .

٣ ـ يمكننا أن نمثل المبدأ الرابع رمزياً بالشكل :

$$a^+ = a'^+ \Rightarrow a = a'$$

وأن نستنتج أن التطبيق $f \; :\cdot \quad a \xrightarrow{f} a^+$

يجعل كل عدد طبيعي لا يساوي الصفر خيالاً لعـدد طبيعي وحيـد فهو تقابل بين المجموعة N والمجموعة $N^* = N - \{0\}$.

٤ ـ إن المبدأ الأخير يعطي طريقة البرهان بالتراجع : في الحقيقة لنفرض أن E مجموعة جزئية من N معروفة بخاصة معينة نرمز لها بالقضية P(n) حيث n متحول المجموعة E . فإذا كانت هذه القضية صحيحة من أجل n = 0 (0 ∈ E) وأمكن استنتاج صحتها من أجل $n = h^+$ انطلاقاً من فرض صحتها من أجل n = h وذلك مهما كان h ∈ E أي :

$$\forall h \in E \Rightarrow h^+ \in E$$

فإننا نقرر استناداً إلى هذا المبدأ أن هذه القضية صحيحة من أجل كل قيمة لـ n أي .

$$\forall n \in N \;:\; P(n) \Leftrightarrow E = N$$

ويمكننا أن نرمز لكل ماتقدم بالعلاقة المنطقية :

$$\{ P(0) \wedge [\forall h \in E \;:\; P(h) \Rightarrow P(h^+)] \} \Rightarrow E = N$$

٣ ـ ٢ **ملاحظة** : يمكننا تعميم مبدأ التراجع بالشكل التالي :

N's ـ إذا كانت E مجموعة جزئية من N وحققت الشرطين التاليين :

$$h \in E \;,\; (q \in E \Rightarrow q^+ \in E) \;,\; q \geqslant h$$

فان :

$$E = N - \{0, 1, \ldots, h\}$$

أي إذا كانت القضية P(n) محققة من أجل n = h ، وتنتج صحتها من أجل $n = q^+$ عند فرض صحتها من أجل n = q فإنها تكون صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geqslant h$.

٤ ـ ٢ **بنية مجموعة الأعداد الطبيعية** : بعد أن كونا مجموعة الأعداد الطبيعية سنحاول فيما يلي بناء هذه المجموعة أي تعريف علاقات بين عناصرها وعمليات داخلية عليها .

٥ - ٢ جمع الأعداد الطبيعية : إن أول عملية داخليـة نجريها على الأعداد الطبيعية هي الجمع ونرمز له عادة بـ + وذلك بأن نقابل بين كل زوج مرتب (x , y) من الأعداد الطبيعية وعدد طبيعي آخر نرمز له بـ x + y ونسميه « مجموع هذين العددين » . نعرف هذه العملية بطريقة التراجع انطلاقاً من المبدأين التاليين :

A_1 : $x + 0 = x$ $\quad \forall x \in N \quad$ (1)

A_2 : $x + y^+ = (x + y)^+$ $\quad \forall x , y \in N \quad$ (2)

ويعني المبدأ الأول أن الصفر هو عنصر محايد أيمن لعمليـة الجمع كما يعني المبدأ الأخـــير أنه إذا كان x + y معروفاً فإن المجموع $x + y^+$ يعرف بأنه العـدد الذي يلي العدد x + y وذلك مها كان العددان x و y من N .

نفرض في هاتين العلاقتين أن لـ x قيمة معينة ولكنها كيفية بيـنما يمثل y متحول مجموعة جزئية من N نرمز لها بـ A ونفرض أن الجمع معروف من أجل كل عنصر منها . تبين لنا العلاقة (1) أن A تحوي الصفر على الأقل أما العلاقة (2) فإنها تبين أنه إذا كان الجمع معرفاً من أجل y فإنه معرف من أجل y^+ أي :

$$[(0 \in A) \text{ و } (y \in A \Rightarrow y^+ \in A)] \Rightarrow A = N$$

فاستناداً إلى المبدأ (N_5) يكون الجمع معرفاً على N كاملة وبصورة خاصة سيكون :

$$x + 0^+ = (x + 0)^+ \iff x + 1 = x^+$$

إن إضافة العدد (1) إلى x يعطي العدد الذي يلي x وذلك باعتبار (1) هو العدد الذي يلي الصفر .

٥ ـ ٢ خواص جمع الأعداد الطبيعية : إن الجمع يتمتع بالخواص التاليـــة :

(١) إن الجمع عملية داخلية تجميعية (قابلة للدمج) (انظرالتمرين٤٢) :

$$\forall x, y, z \in N \quad : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

(٢) إن الجمع عملية داخلية تبديلية (انظر التمرين ٤٣) :

$$\forall x, y \in N \quad : \quad x + y = y + x$$

ينتج عن هذه الخاصة وعن المبدأ A_1 أن :

$$\forall x \in N \quad : \quad x + 0 = 0 + x = x$$

وهذا يعني أن الصفر هو العنصر الحايد لعملية جمع الأعداد الطبيعية .

(٣) إذا كان a , b عددين طبيعيين فإنه يكون :

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ , \ b = 0$$

(انظر التمرين ٤٤) .

ينتج عن هذه الخاصة أنه لا يوجد لأي عـدد طبيعي سوى الصفر ، نظير بالنسبة للجمع ، فالعملية المعاكسة للجمع غير معرفة على N .

(٤) عملية جمع الأعداد الطبيعية قابلة للاختصار أي أن كل عـــدد طبيعي عنصر منتظم [1] بالنسبة لهذه العملية (انظر التمرين ٤٥) أي :

---

(١) يعرف العنصر المنتظم بالعلاقتين الواردتين في [٣٣-١] وعندماتكون العملية تبديلية يكتفي بواحدة فقط من هاتين العلاقتين كالتي أوردناها في رأس الصفحة التالية .

$$\forall x \in N \ : \ a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

٦ ـ ٢ **ملاحظة** : بما أن جمع الأعداد الطبيعية عملية تبديلية وتجميعية فإنه يمكننا أن نبادل بين مواقع الأعداد المجموعة دون أن يتغير ناتج الجمع . وهذا يعني أنه لتكوار عملية الجمع يمكننا أن نبدأ بهذه العملية من حيث أردنا وبالترتيب الذي نريد ونرمز عادة :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

٧ ـ ٢ **علاقة التراجح في المجموعة N** : إذا كان $c \neq o$ و $a = b + c$ قلنا إن a أكبر من b أو إن b يكبر a ورمزنا لذلك بالشكل :

$$a = b + c \ , \ c \neq o \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ b < a \end{cases}$$

وإذا كان من الممكن أن نعطي لعدد طبيعي واحد رمزين مختلفين وكان من الممكن أن يكون $c = 0$ فإننا نعرف علاقة تراجح بالمعنى الواسع بالشكل التالي :

$$a = b + c \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant b \\ b \leqslant a \end{cases}$$

ويبرهن بسهولة أن العلاقة $\leqslant$ هي علاقة ترتيب كلي على N .

بما أن عملية الجمع وحيدة القيمة وتبديلية وتجميعية وقابلة للاختصار فإنه يمكننا أن نكتب :

$$a = b + c \Leftrightarrow a + d = (b + d) + c \ , \ \forall d \in N$$

وهذه العلاقة تكافىء العلاقة :

$$a \geqslant b \Leftrightarrow a + d \geqslant b + d$$

ونقول عن هذا « إن علاقة التراجح المعرفة على N منسجمة مع عملية الجمع [1] » .

إذا تذكرنا أن العلاقة $<$ متعدية فانه يمكننا تعميم ماسبق بالشكل التالي :

$$\left.\begin{array}{l} a > b \Rightarrow a + c > b + c \\ c > d \Rightarrow b + c > b + d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c > b + d$$

نفسر ما تقدم بقولنا « يمكن جمع متراجحتين من اتجاه واحد إلى بعضها وذلك بأن نضيف إلى كل طرف من المتراجحة الأولى الطرف المشابه له في الوضع من المتراجحة الثانية » .

٨ - ٢ **فضل عددين طبيعيين** : إذا كان $a \geqslant b$ فقد رأينا أعلاه أنه يوجد عدد طبيعي x بحيث يكون $a = b + x$ ، نسمي x فضل a

---

(١) لقد عرفنا في [٣٧ - ١] انسجام علاقة تكافؤ مع عملية داخلية ويمكننا أن نعمم هذا التعريف فنقول : عن علاقة ما $\mathfrak{R}$ إنها منسجمة مع العملية $\top$ المعرفة على المجموعة ذاتها فيما إذا كان :

$$\forall x, y, z \in E \ , \ \ x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow (x \top z) \,\mathfrak{R}\, (y \top z)$$

$$x \,\mathfrak{R}\, y \Rightarrow (z \top x) \,\mathfrak{R}\, (z \top y)$$

وبصورة خاصة نعرف انسجام العملية $\top$ مع علاقة الترتيب $<$:

$$\forall a, b, c \in E, a < b \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \top c < b \top c \\ c \top a < c \top b \end{array}\right.$$

عن b ونكتب ذلك بالشكل :

$$x = a - b$$

وكثيراً ما نقول إن x هو حاصل طرح b من a .

إن العدد x وحيد لأنه لو وجـــد عددان x , x′ يحققـان ما سبق فإنه يكون :

$$a = b + x = b + x' \Rightarrow x = x'$$

لأن جمع الأعداد الطبيعية قابل للاختصار .

نسمي العملية التي نرمز لها بـ (−) طرحاً وبما أن :

$$x = a - b \Rightarrow a \geqslant b$$

فإنه ليس لعملية الطرح هذه معنى إلا إذا كان $b \geqslant a$ فهي غـــير معرفة من أجل كل زوج من عناصر N فهي إذن ليست عمليـة داخلية معرفة على N .

يتمتع الطرح بالخاصة الأساسية التالية :

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

والتي نذكرها بقولنا « لا يتغير حاصل الطرح عندما نضيف إلى حديه عدداً واحداً » (لماذا ؟) .

٩ - ٢ الضرب : الضرب عملية داخلية نرمز لها بـ (×) ونعرفها على N بالمبدأين التاليين :

P_1 - $\quad a \times 0 = 0 \quad , \quad \forall a \in N$

P_2 - $\quad a \times b^{+} = a \times b + a \quad , \quad \forall a , b \in N$

ونجد بصورة خاصة :

$$a \times 1 = a \times 0^{+} = a \times 0 + a = a$$

$$a \times 2 = a \times 1^{+} = a \times 1 + a = a + a$$

وهكذا . . .

وقد اصطلح أن يستعاض عن الاشارة (×) بـ (٠) وفي حالة ضرب حروف ببعضها يمكن حذف كل من هاتين الاشارتين

١٠ - ٢ خواص ضرب الأعداد الطبيعية :

١ - الضرب عملية توزيعية على الجمع (انظر التمرين ٤٧) أي :

$$\forall a, b, c \in N : a(b+c) = ab + ac \quad , \quad (b+c)a = ba + ca$$

٢ - الضرب عملية تجميعية (قابلة للدمج) (لماذا ؟) أي :

$$\forall x, y, z \in N : (xy)z = x(yz)$$

٣ - الضرب عملية تبديلية (انظر التمرين ٤٩) أي :

$$\forall a, b \in N : ab = ba$$

٤ - إذا كان جداء عددين صفراً فان أحدهما على الأقل صفر (انظر التمرين ٥٠) أي :

$$a . b = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{أو} \quad b = 0$$

٥ - إن عملية الضرب منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة على N (انظر التمرين ٥١) أي :

$$\forall c \in N : a \leqslant b \Rightarrow ac \leqslant bc$$

$$\forall c \in N^{*} : a < b \Rightarrow ac < bc$$

وينتج عن هذه الخاصة إمكان ضرب متراجحتين من اتجاه واحد. في الحقيقة إذا كنا أمام المتراجحتين :

$$a < b \quad , \quad c < d$$

فانه يمكننا ضرب الأولى بـ c والثانية بـ b فنجد :

$$a \cdot c < b \cdot c \quad , \quad b \cdot c < b \cdot d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$$

وذلك لأن علاقة الترتيب > متعديه .

١٠ - ٢ التقسيم - مضاعفات عدد - ليكن a عدداً طبيعياً وليكن f التابع المعرف على N بالعلاقة :

$$x \xrightarrow{f} ax \quad \text{أو} \quad y = a x$$

نسمي y مضاعفاً لـ a وسيكون خيال N ، وفق هذا التابع ، مجموعة مضاعفات a التي نرمز لها بـ M(a) ونجد :

$$M(0) = \{0\} \quad , \quad M(1) = N \quad , \quad M(a) = \{0, a, 2a, \dots\}$$

إن التابع f الذي أتينا على تعريفه هو تقابل (تطبيق ثنائي الجانب) بين N و M(a) . من أجل $a \neq 0$ يكون التطبيق المعاكس لـ f هو :

$$a \neq o \quad , \quad y \xrightarrow{f^{-1}} \frac{y}{a} \quad \text{أو} \quad x = \frac{y}{a}$$

إن x خيال y في التطبيق f^{-1} غير موجود إلا إذا كان y من مضاعفات a ونقول عندها إن a يقسم y ونرمز لذلك بالشكل $a \mid y$ أو إن a قاسم لـ y أو إن y يقبل القسمة على a .

نستنتج مما تقدم أن :

$$\forall a \in N : 1 \mid a \;,\; a \mid 0 \;,\; a \mid a$$

يبرهن بسهولة على أن علاقة (يقسم) منعكسة ، متعدية ولا متناظرة فهي إذن علاقة ترتيب جزئي معرفة في المجموعة N .

١١ – ٢ **التقسيم الاقليدي** : إذا كان a , b عددين طبيعيين فانه يبرهن (انظر التمرين ٥٣) على وجود عدد طبيعي وحيد q بحيث يكون :

$$(*) \qquad b\,q \leqslant a < b\,(q+1)$$

نسمي عملية إيجاد العدد q « تقسيما اقليديا » ونسمي a مقسوماً و b مقسوماً عليه ، أما q فانه يدعى « ناتج التقسيم الاقليدي » .

ينتج عن العلاقة (*) أنه يوجد عدد طبيعي وحيد r يصغر b بحيث يكون :

$$a = b\,q + r$$

نسمي العدد r المعرف بالشكل السابق « باقي التقسيم الاقليدي لـ a على b » .

١٢ – ٢ **تمرين** : هل التقسيم الاقليدي ، الذي يربط بين كل زوج مرتب من الأعداد الطبيعية وناتج التقسيم الاقليدي للمركبة الأولى على المركبة الثانية لهذا الزوج ، عملية داخلية معرفة على N وإذا كان ذلك ادرس خواص هذه العملية .

١٣ – ٢ **علاقة التوافق** : إذا كان n عدداً غير معدوم وإذا كان باقيا قسمة العددين (a , b) على n متساويين قلنا إن a يوافق b قياس n (Modulo n) وكتبنا ذلك بالشكل :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

أمثـــلة :

$$12 \equiv 17 \pmod{5} \quad , \quad 0 \equiv 7 \pmod{7} \quad , \quad 11 \equiv 3 \pmod{4}$$

يبرهن بسهولة على أن هذه العلاقة منعكسة ومتناظرة ومتعـدية فهي. إذن علاقة تـكافؤ تجزىء المجموعة N إلى أصناف تـكافؤ إذ أنه مهما كان العدد $a \in N$ فإنه باقي قسمته على n سيكون واحداً من عناصر المجموعة :

$$[0 , n - 1] = \{ 0 , 1 , 2 , \ldots , n - 1 \}$$

إذا كان r عدداً طبيعياً من هذا المجال فإن مجموعة الأعـداد الطبيعية الموافقة لـ r قياس n تدعى صنفاً توافقياً قياس n ونرمز له بالشكل :

$$(r) = \{ r , r + n , r + 2n , \ldots , r + q . n , \ldots \}$$

وإذا كان $a \in (r)$ فكثيراً ما نكتب $(r) = (a)$ ونقول إن الصنف (a) يساوي الصنف (r) وإننا اخترنا r ممثلاً لهذا الصنف .

مثال : إن أصناف التوافق قياس 5 هي :

$$(0) = \{ 0 , 5 , 10 , 15 , \ldots \}$$

$$(1) = \{ 1 , 6 , 11 , 16 , \ldots \}$$

$$(2) = \{ 2 , 7 , 12 , 17 , \ldots \}$$

$$(3) = \{ 3 , 8 , 13 , 18 , \ldots \}$$

$$(4) = \{ 4 , 9 , 14 , 19 , \ldots \}$$

ونلاحظ بسهولة أن :

$$(0) \cup (1) \cup (2) \cup (3) \cup (4) = N$$

١٤ - ٢ خواص علاقة التوافق :

١ - ليكون عددان طبيعيان متوافقين قياس n يلزم ويكفي أن يكون فضلهما من مضاعفات العدد n (انظر التمرين ٥٧) :

$$a \geqslant b \quad , \quad a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \in M(n)$$

٢ - يمكن جمع علاقتي توافق من قياس n (انظر التمرين ٥٥) أي أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الجمع على N :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b' \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$$

وبصورة خاصة فإن :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b \equiv a' + b \pmod{n}$$

٣ - يمكن ضرب علاقتي توافق من قياس واحد (انظر التمرين ٦٠) أي أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الضرب على N .

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b' \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, b \equiv a' \,.\, b' \pmod{n}$$

وبصورة خاصة :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a' \pmod{n} \\ b \equiv b \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a \,.\, b \equiv a' \,.\, b \pmod{n}$$

٤ - يمكن رفع علاقة توافق إلى قوة اسها عدد طبيعي (انظر التمرين ٦٢)

$$\forall x \in N \quad : \quad a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^x \equiv b^x \pmod{n}$$

١٥ - ٢ جبر أصناف التوافق : لنرمز بـ C_n لمجموعة أصناف التوافق قياس n أي :

$$C_n = \{(0),(1),(2), \ldots ,(n-1)\}$$

التي هي مجموعة منتهية عـــدد عناصرها n . سنعرف فيما يلي عمليتين داخليتين على هذه المجموعة نسميها أيضاً جمع وضرب أصناف التوافق .

١٦ - ٢ جمع صنفي توافق قياس n : لنقابل بين كل صنفين (a) ، (b) من C_n وبين صنف ثالث من C_n نسميه مجموع هذين الصنفين ، نرمز له بـ (a + b) ونعرفه بالعلاقة التالية :

$$(a) \dot{+} (b) = (a + b)$$

حيث $\dot{+}$ يمثل جميع أصناف التوافق و + يمثل جمع الأعداد الطبيعية ونذكر ذلك بقولنـــا : « إن مجموع الصنفين الموافقين (قياس n) لـ b , a هو الصنف الموافق (قياس n) لـ a + b » ومن الواضح أن $(a + b) \in C_n$ لأن علاقة التوافق تجزىء المجموعة N فلا بد لكل عـدد طبيعي مثل a + b من أن ينتمي إلى أحد الأصناف C_n .

١٧ - ٢ أمثلة ١ - من جدول التوافق قياس (5) يمكننا أن نستنتج :

$$(3) + (4) = (7) = (2)$$

٢ - في التوافق قياس (10) يمكننا أن نكتب :

$$(5) + (5) = (10) = (0)$$

١٨ - ٢ خواص جمع أصناف التوافق : نستنتج بسهولة من تعريف جمع صنفي توافق الخواص التالية :

١ - إن جمع صنفين عملية داخلية تبديلية لأن :

$$(a) \dot{+} (b) = (a + b) \quad و \quad (b) \dot{+} (a) = (b + a)$$

ولكن $(a + b) = (b + a)$ لأن $a + b = b + a$.

٢ - إن هذه العملية قابلة الدمج لأن :

$$[(a) \dot{+} (b)] \dot{+} (c) = (a + b) \dot{+} (c) = (a + b + c)$$

$$(a) \dot{+} [(b) \dot{+} (c)] = (a) \dot{+} (b + c) = (a + b + c)$$

٣ - لهذه العملية عنصر حيادي هو الصنف (0) وذلك لأنها تبديلية ولأن :

$$(a) \dot{+} (0) = (a + 0) = (a)$$

٤ - لكل عنصر $(r) \in C_n$ ، $(r \neq 0)$ عنصر نظير بالنسبة لهذه العملية هو $(n - r)$ وذلك لأن العملية تبديلية ولأن :

$$(n - r) \dot{+} (r) = (n) = (0)$$

أما العنصر (0) فهو يناظر نفسه .

١٩ - ٢ مثال : يمثل الجدولان التاليـــان جمـع أصناف التوافق (قياس 5) و (قياس 6) .

$\dot{+}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(0)
(2)	(2)	(3)	(4)	(5)	(0)	(1)
(3)	(3)	(4)	(5)	(0)	(1)	(2)
(4)	(4)	(5)	(0)	(1)	(2)	(3)
(5)	(5)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)

$\dot{+}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(0)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	(1)	(2)	(3)	(4)	(0)
(2)	(2)	(3)	(4)	(0)	(1)
(3)	(3)	(4)	(0)	(1)	(2)
(4)	(4)	(0)	(1)	(2)	(3)

٢٠ ـ ٢ جداء صنفين : لنقابل بين كل صنفين (a) , (b) من C_n وصنف ثالث منه نسميه جداء (a) في (b) نرمز له بـ (a . b) ونعرفه بالعلاقة :

$$(a) \cdot (b) = (a \cdot b)$$

نذكر هذه القاعدة بقولنا : « إن جداء صنفي b , a هو صنف ab »

مثال : في التوافق (قياس 5) نجد :

$$(4) \cdot (3) = (12) = (2)$$

ونجد في التوافق قياس (3) أن :

$$(4) . (3) = (12) = (0)$$

٢١ - ٢ خواص جداء أصناف التوافق : استناداً إلى تعريف هذه العملية الداخلية يمكننا أن نستنتج الخواص التالية :

١ ـ عملية جداء أصناف التوافق تبديلية لأن :

$$(a) . (b) = (a . b) \quad , \quad (b) . (a) = (b . a) \quad \text{و} \quad a . b = b . a$$

٢ ـ جداء أصناف التوافق قابل للدمج (عملية تجميعية) لأن :

$$[(a) . (b)] . (c) = (a . b) . (c) = [(a . b)] . (c) = (a . b . c)$$

٣ ـ لجداء أصناف التوافق عنصر محايد هو (1) وذلك لأن هذه العملية تبديلية ولأن :

$$(a) . (1) = (a . 1) = (a)$$

٢٢ - ٢ مثال : يمثل الجدولان التاليان جدولي الضرب لأصناف التوافق (قياس 5) و (قياس 6) :

$\dot{\times}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(2)	(0)	(2)	(4)	(1)	(3)
(3)	(0)	(3)	(1)	(4)	(2)
(4)	(0)	(4)	(3)	(2)	(1)

$\dot{\times}$	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(1)	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(2)	(0)	(2)	(4)	(0)	(2)	(4)
(3)	(0)	(3)	(0)	(3)	(0)	(3)
(4)	(0)	(4)	(2)	(0)	(4)	(2)
(5)	(0)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

٢٣ - ٢ **مجموعة الأعداد الصحيحة** : لقد عرفنا على مجموعة الأعداد الطبيعية N عمليتين داخليتين هما الجمع والضرب ، وقلنا عند ذاك إن العمليتين المعاكستين لهاتين العمليتين غير معرفتين على N . سنبني الآن انطلاقاً من المجموعة N ، مجموعة عددية جديدة يكون لكل عنصر فيها نظير بالنسبة لعملية الجمع المعرفة عليها ، وبذلك نتمكن من تعريف عملية الطرح (العملية المعاكسة لعملية الجمع) على هذه المجموعة . نسمي هذه المجموعة « مجموعة الأعداد الصحيحة » ونرمز لها بـ Z .

نتوصل إلى هدفنا هذا بأن نوسع مفهوم $a - b$ على الحالة التي يكون فيها $a < b$.

لتكن المجموعة الجداء N^2 ولنعرف عليها علاقة $\mathcal{R}$ بالشكل التالي :

$$(*)\ \forall a , b , a' , b' \in N \ , \quad (a , b)\ \mathcal{R}\ (a' , b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$$

أمثلة :

$$(7 , 3)\ \mathcal{R}\ (11 , 7) \ , \quad (5 , 2)\ \mathcal{R}\ (9 , 6) \ , \quad (7 , 1)\ \mathcal{R}\ (8 , 2)$$

يبرهن بسهولة ان هذه العلاقة منعكسة ومتعدية ومتناظرة فهي علاقة تكافؤ تجزىء المجموعة N^2 إلى أصناف تكافؤ . نرمز عادة لمجموعة هذه الأصناف بالشكل $N^2/\mathcal{R}$ ونرمز لصنف من هذه الأصناف ، يحوي العنصر (a, b) بالشكل $(\widehat{a, b})$ ونسمي هذا الصنف عدداً صحيحاً .

٢٤ - ٢ تساوي عددين صحيحين : استناداً إلى الخاصة الأساسية لأصناف التكافؤ التي تقول : إذا كان ممثلا صنفي تكافؤ لعلاقة واحدة متكافئين ، وفق هذه العلاقة ، فإن هذين الصنفين متساويان » ، فإننا نقول :

« يتساوى العددان الصحيحان إذا كان ممثلاهما متكافئين وفق العلاقة (*) »

فنكتب مثلاً :

$$(5, 0)\ \mathcal{R}\ (7, 2) \quad \Leftrightarrow \quad (\widehat{7, 2}) = (\widehat{5, 0})$$

$$11 + 0 = 5 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad (\widehat{11, 6}) = (\widehat{5, 0})$$

وإذا رمزنا للعدد الصحيح $(\widehat{x, y})$ تجاوزاً ، لتسهيل الطباعة وعند عدم خشية الالتباس ، بالشكل (x, y) ، فإنه يمكننا أن نكتب العلاقات التالية :

$$\forall m \in N \quad : \quad (a, b) = (a + m, b + m) \qquad (1)$$

$$\forall l \in N, (l \leq a, l \leq b) : (a, b) = (a - l, b - l) \qquad (2)$$

وبصورة خاصة :

$$a \geq b \quad : (a, b) = (a - b, 0) \qquad (3)$$

$$a \leq b \quad : (a, b) = (0, b - a) \qquad (4)$$

$$\forall k \in N \quad : (0, 0) = (k, k) \qquad (5)$$

وهذا يعني أنه يمكن أن يرمز لأي عدد صحيح بواحد من الأشكال التالية :

$$(0,0) \quad , \quad (a,0) \quad , \quad (0,b) \quad : \quad a,b \in N^*$$

إذا كان $a , b \in N^*$ ورمزنا بـ Z^+ لمجموعة الأعداد الصحيحة التي تمثل بالشكل (a , o) وبـ Z^- لمجموعة الأعداد الصحيحة التي تمثل بالشكل (o , b) فإنه يكون $Z = Z^- \cup \{(0,0)\} \cup Z^+$.

بعد تعريف المجموعة Z سنشيد عليها بنية رياضية وذلك بأن نعرف عليها عمليات داخلية وعلاقات ثنائية .

٢٥ - ٢ **جمع الأعداد الصحيحة** : ننشىء أولا على الجداء N^2 عملية داخلية نرمز لها تجاوزاً بـ + ، ونعرفها بالعلاقة :

$$(a , b) + (c , d) = (a + c , b + d)$$

ونبرهن بعد ذلك أنه إذا استعضنا عن العنصرين (a , b) ، (c , d) بالعنصرين المكافئين لهما على الترتيب (a′ , b′) , (c′ , d′) حسب العلاقة (*) فإن الناتج الجديد يكافىء الناتج السابق ، وهذا يعني أن :

$$(a + c \ , \ b + d) \ \mathcal{R} \ (a' + c' \ , \ b' + d')$$

في الحقيقة انطلاقاً من العلاقة (*) يمكننا أن نكتب :

$$(a , b) \ \mathcal{R} \ (a' , b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$$

$$(c , d) \ \mathcal{R} \ (c' , d') \Leftrightarrow c + d' = c' + d$$

واستناداً إلى قابلية جمع الأعداد الطبيعية للاختصار والمبادلة والتجميع

يمكننا أن نكتب :

$$a + c + b' + d' = a' + c' + b + d$$

$$\Leftrightarrow (a + c , b + d) \ \mathcal{R} \ (a' + c' , b' + d')$$

استناداً إلى ما تقدم يمكننا أن نورد تعريف جمع الأعـداد الصحيحة بالشكل التالي :

$$(\widehat{a , b}) \dot{+} (\widehat{c , d}) = (\widehat{a + c , b + d})$$

نلاحظ أن العلاقة السابقة تحوي عمليتين مميزنا كلا منها عملية جمع رمزنا للأولى منها بـ $\dot{+}$ (وسنحذف النقطة اذا لم يكن التباس) وللثانية بـ + للتفريق بين جمع عددين صحيحين معرفين كما سبق وبين جمع عددين طبيعيين .

٢٦ - ٢ خواص جمع الأعداد الصحيحة : يمكننا أن نستنتج بسهولة من تعريف جمع الأعداد الصحيحة ، الخواص التالية :

١ - جمع الأعداد الصحيحة عملية قابلة للدمج (تجميعية) .

٢ - جمع الأعداد الصحيحة عملية تبديلية .

٣ - إن العدد (0 , 0) هو العنصر الحايد لهذه العملية .

٤ - يقبل كل عدد صحيح مثل (a , b) نظيراً بالنسبة للجمع هو العدد (b , a) لأن :

$$(a , b) + (b , a) = (a + b , b + a) = (a + b , a + b) = (0 , 0)$$

وبصورة خاصة إن العددين (0 , n) , (n , 0) متناظران .

٥ - إن جمع الأعداد الصحيحة عملية قابلة للاختصار :

لبرهان هذه الخاصة نكتفي بأن نبرهن أنه مهما كانت الأعداد الصحيحة :

$(\widehat{a,b})$ ، $(\widehat{c,d})$ ، $(\widehat{e,f})$ فإن العلاقة التالية صحيحة :

$$(\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{c,d}) = (\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{e,f}) \Rightarrow$$

$$(\widehat{c,d}) = (\widehat{e,f})$$

وذلك لأن جمع الأعداد الصحيحة تبديلي .

لبرهان هذه العلاقة نكتب :

$$[(a, b) + (c, d)] \mathcal{R} [(a, b) + (e, f)]$$

$$\Leftrightarrow (a + c, b + d) \mathcal{R} (a + e, b + f)$$

$$\Leftrightarrow a + c + b + f = b + d + a + e$$

وبما أن جمع الأعداد الطبيعية قابل للدمج والتبديل فان :

$$a + c + b + f = b + d + a + e$$

$$\Leftrightarrow (a + b) + (c + f) = (a + b) + (d + e)$$

وبما أن جمع الأعداد الطبيعية قابل للاختصار فإن :

$$(a + b) + (c + f) = (a + b) + (d + e) \Rightarrow (c + f) = (d + e)$$

$$\Leftrightarrow (c, d) \mathcal{R} (e, f)$$

ينتج مما تقدم أن :

$$(a + c, b + d) \mathcal{R} (a + e, b + f) \Rightarrow (c, d) \mathcal{R} (e, f)$$

واستناداً إلى [٢٤ – ٢] وإلى تعريف جمع الأعداد الصحيحة :

$$(\widehat{a + c, b + d}) = (\widehat{a + e, b + f}) \Rightarrow (\widehat{c,d}) = (\widehat{e,f})$$

أو :

$$(\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{c,d}) = (\widehat{a,b}) \dot{+} (\widehat{e,f}) \Rightarrow (\widehat{c,d}) = (\widehat{e,f})$$

وهو المطلوب برهانه .

٢٧ - ٢ **ضرب الأعداد الصحيحة** : ننشيء على مجموعة الأعـــداد الصحيحة عملية داخلية أخرى نسميها (ضرباً) نرمز لها موقتاً بـ $\dot{\times}$ ، نعرفها بالعلاقة التالية :

$$(\widehat{a,b}) \dot{\times} (\widehat{c,d}) = (\overline{ac+bd, ad+bc})$$

يبرهن أن ناتج العملية لا يتغير فيما إذا غيرنا ممثلي حديها بممثلين أخرين لذا يمكننا أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل :

$$(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

حيث نفرض أن الزوج المرتب من الأعـــداد الطبيعية (x, y) يمثل صنف التكافؤ $(\widehat{x,y})$ وحيث حذفنا النقطة من فوق $\times$.

٢٨ - ٢ **خواص ضرب الأعداد الصحيحة** : استناداً إلى تعريف الضرب على المجموعة Z يمكننا أن نستنتج بسهولة الخواص التالية :

١ - ضرب الأعداد الصحيحة عملية قابلة للدمج (تجميعية) أي :

$$[(a, b) \times (c, d)] \times (e, f) = (a, b) \times [(c, d) \times (e, f)]$$

٢ - ضرب الأعداد الصحيحة عملية تبديلية :

$$(a, b) \times (c, d) = (c, d) \times (a, b)$$

٣ ـ ضرب الأعداد الصحيحة توزيعي على جمعها :

$$(a , b) \times [(c , d) + (e , f)] = (a , b) \times (c , d) + \\ + (a , b) \times (e , f)$$

٤ ـ إن العدد الصحيح (1 , 0) عنصر محايد لعملية الضرب :

$$(a , b) \times (1 , 0) = (a , b) \quad \text{و} \quad (1 , 0) \times (a , b) = (a , b)$$

٥ ـ ليس لأي عدد صحيح [سوى العددين (1 , 0) ، (0 , 1)] نظير بالنسبة للضرب .

٦ ـ حاصل ضرب العدد الصحيح (0,0) بأي عـــدد صحيح آخر يساوي (0 , 0) :

$$(0 , 0) \times (a , b) = (a , b) \times (0 , 0) = (0 , 0)$$

٧ ـ كل الأعداد الصحيحة منتظمة بالنسبة للضرب ما عدا العدد (0,0) (لماذا؟) .

٨ ـ بما أن عملية ضرب الأعداد الصحيحة تبديلية وقابـــلة للدمج (تجميعية) فإننا نجري تكرار هذه العملية بدون ترتيب ونكتب اصطلاحاً :

$$(a_1 , b_1) \times (a_2 , b_2) \times \ldots \times (a_n , b_n) = \prod_1^n (a_i , b_i)$$

٢٩ ـ ٢ المجموعة N مجموعة جزئية من Z : لقد عرفنا على N عمليتين داخليتين هما الجمع والضرب ورمزنا لهما بـ (+ ، ×) وعرفنا على Z عمليتين داخليتين تحملان هذين الاسمين نفسهما ورمزنا لهما بـ ($\dot{+} , \dot{\times}$) وعرفنا المجموعة $Z \supset Z^+$ بأنها مجموعة الأعداد الصحيحة التي يمكن أن

يرمز لكل منها بالشكل $(\widehat{n,0})$ حيث $n \neq 0$ ويبرهن بسهولة أن المجموعة Z^+ مستقرة بالنسبة للعمليتين $(\dot{+}, \dot{\times})$.

لنطبق المجموعة N على المجموعة $Z' = Z^+ + \{0\}$ بالشكل :

$$\forall a \in N \quad : \quad a \xrightarrow{f} (\widehat{a,0})$$

إن هذا التطبيق تقابل (تطبيق ثنائي الجانب) ويحقق العلاقتين :

$$f(a+b) = (\widehat{a+b,0}) = (\widehat{a,0}) \dot{+} (\widehat{b,0}) =$$

$$= f(a) \dot{+} f(b)$$

$$f(a \cdot b) = (\widehat{a \cdot b, 0}) = (\widehat{a,0}) \dot{\times} (\widehat{b,0}) =$$

$$= f(a) \dot{\times} f(b)$$

وهـــذا ما يبرهن على أن f هو إيزومورفيزم لـ (+ و × و N) على ($Z', \dot{\times}, \dot{+}$)، ونعبر عن هذا أحياناً بقولنا إن N متحدة بالشكل مع Z' بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين على كل منها . وبما أننا في الرياضيات المعاصرة نهدف إلى دراسة خواص الأشياء أكثر من الأشياء نفسها فإنه يمكننا أن نعطي لعمليتين تتمتعان بخواص متحدة رمزاً واحداً كما أننا نطابق بين x و f(x) عندما يكون f إيزومورفيزماً . فنكتب هنا :

$$a \neq 0 \quad , \quad (\widehat{a,0}) = a$$

و $(\widehat{0,0}) = 0$ فيكون : $Z' = N$

ونقول إن العدد الصحيح $(0,0)$ هو صفر الأعداد الصحيحة .

نسمي الأعداد الصحيحة التي تنتمي إلى Z^+ أعداداً موجبة ونرمز لها

بالشكل $+a$ أما الأعـــداد التي يرمز لهـا بـ $(0, a)$ والتي تنتمي إلى Z^- فإنها مناظرة للأعداد الموجبة (a, o) ؛ نسميها أعداداً ســالبة ونرمز لها بالشكل :

$$(0, a) = -a$$

ونقول في كل من هاتين الحالتين إن العدد الطبيعي a هو القيمـــة المطلقة لكل من العددين الصحيحين $+a = (a, 0)$ ، $(0, a) = -a$ كما نقول إن إشارة العدد الموجب $+a$ هي $(+)$ وإن إشارة العدد السالب $(-a)$ هي $(-)$.

٣٠ - ٢ قواعد ضرب الأعداد الصحيحة : استناداً إلى تعريف عملية ضرب الأعداد الصحيحة يمكننا أن نكتب العلاقات التالية :

$$(m, 0) . (n, 0) = (m . n, 0) \Leftrightarrow (+m) . (+n) = +(m . n)$$

$$(m, 0) . (0, n) = (0, m . n) \Leftrightarrow (+m) . (-n) = -(m . n)$$

$$(0, m) . (n, 0) = (0, m . n) \Leftrightarrow (-m) . (+n) = -(m . n)$$

$$(0, m) . (0, n) = (m . n, 0) \Leftrightarrow (-m) . (-n) = +(m . n)$$

نلخص ماتقدم بالقاعدة التالية :

« جداء عددين صحيحين يساوي عدداً صحيحاً قيمته المطلقة تساوي جداء القيمتين المطلقتين لهذين العددين وتكون إشارة الجداء $(+)$ إذا كان العددان المضروبان من إشارة واحدة وتكون هذه الإشارة $(-)$ إذا كان هذان العددان من إشارتين مختلفتين . ونكتب عادة قاعدة ضرب الإشارات بالشكل التالي :

$$(+)\times(+)=+ \qquad (-)\times(-)=+$$

$$(+)\times(-)=- \qquad (-)\times(+)=-$$

نعمم القاعدة السابقة بقولنا :

« لإيجاد حاصل ضرب جملة من الأعداد الصحيحة نضرب القيم المطلقة لهذه الأعداد ببعضها ونتخذ الناتج قيمة مطلقة لحاصل الضرب ونضرب إشارات هذه الأعداد بالتدرج حسب القاعدة السابقة فنحصل على إشارة حاصل الضرب » .

٣١ - ٢ **عملية طرح الأعداد الصحيحة** : لقد رأينا أعلاه أن لكل عدد صحيح نظيراً بالنسبة للجمع وينتج عن هذا أن عملية الطرح ، العملية المعاكسة للجمع [٢٥ - ٢] ، معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة . نرمز لهذه العملية موقتاً بـ $\dot{-}$ ونكتب إستناداً إلى تعريف العملية المعاكسة :

$$(a\ ,\ b) \dot{-} (c\ ,\ d) = (a\ ,\ b) + (d\ ,\ c)$$

حيث (d , c) نظير المطروح (c , d) بالنسبة للجمع .

لقد عرفنا الطرح a - b على N عندما يكون a > b ويمكننا في هذه الحالة أن نكتب :

$$(a\ ,\ 0) \dot{-} (b\ ,\ 0) = (a\ ,\ 0) + (0\ ,\ b) = (a\ ,\ b) =$$
$$(a - b\ ,\ 0) = a - b$$

ونلاحظ أن ناتج الطرح a - b على N يساوي ناتج الطرح ($\dot{-}$) لهذين العددين باعتبارهما عددين صحيحين لذا نستعمل عادة الإشارة ($-$)

رمزاً لعملية طرح الأعداد الصحيحة بدلاً (∸) ونكتب تجاوزاً :

$$(a , 0) - (b , 0) = (a - b , 0)$$

نعمم ما تقدم على الحالة التي يكون فيها $a < b$ ونكتب :

$$(a , 0) - (b , 0) = (a , 0) + (0 , b) = (a , b) =$$
$$= (0 , b - a) = - (b - a)$$

أو بشكل مختصر :

$$a - b = - (b - a)$$

ونقول إذا كان المطروح b أكبر من المطروح منـــه a فإن ناتج الطرح سالب .

٣٢ ـ ٢ **قاعـــدة** : لقد رمزنا للعـدد الصحيح الموجب $(n , 0)$ بالشكل $+n$ ورمزنا للعدد الصحيح السالب بـ $-n$ ـ ويمكننا الآن أن تضمر إشارة الزائد من يسار n ونكتب بشكل مختصر $+n = n$.

وإذا لاحظنا استناداً إلى تعريف الطرح أن :

$$(n , 0) - (0 , m) = (n , 0) + (m , 0) = n + m$$
$$= n - (- m)$$

فإننا نتوصل إلى العلاقة :

$$n - (- m) = n + m$$

نفسر هذا بقولنا إن القوس التي تفصل بين إشـارتي الـ (−) تمثل عملية ضرب لهاتين الإشارتين ونكون بذلك قد عممنا قاعدة ضرب إشارات

الأعداد على ضرب الاشارات بصورة عامة .

إن إشارتي الناقص اللتين ضربناهما ببعضهما تمثلان مفهومين مختلفين: الأولى منهما تمثل عملية طرح بينما تمثل الثانية إشـــارة للعدد الصحيح (n −) ويمكننا أن نعتبر أن كلا منهما تمثل إشارة لعدد بعد أن نذكر أن الطرح هو العملية المعاكسة للجمع فنكتب :

$$n - (-m) = n + [-(-m)]$$

حيث (m −) − هو نظير (m −) بالنسبة للجمع .

٣٣ - ٢ خواص عملية الطرح : استناداً إلى تعريف عملية الطرح على الأعداد الصحيحة يمكننا أن نستنتج بسهولة الخواص التالية :

١ - لهذه العملية عنصر حيادي من اليمين هو العدد (0 , 0) :

$$(a , b) - (0 , 0) = (a , b) + (0 , 0) = (a , b)$$

٢ - كل عدد صحيح نظير لنفسه بالنسبة للطرح :

$$(a , b) - (a , b) = (0 , 0)$$

٣ - كل عدد صحيح عنصر منتظم بالنسبة للطرح :

$$(a , b) - (c , d) = (e , f) - (c , d) \Rightarrow (a , b) = (e , f)$$

$$(c , d) - (a , b) = (c , d) - (e , f) \Rightarrow (a , b) = (e , f)$$

لبرهان العلاقة الأولى نكتب مساواتها الأولى بالشكل :

$$(a , b) + (d , c) = (e , f) + (d , c) \Rightarrow (a , b) = (e , f)$$

وذلك لأن عملية جمع الأعداد الصحيحة قابلة للاختصار .

وتبرهن العلاقة الثانية بالطريقة ذاتها ونقول باختصار : « يمكن إضافة عدد صحيح واحـــد إلى طرفي مساواة » ، أو « يمكن جمع مســاواتين إلى بعضها » .

٤ ـ لايتغير ناتج طرح عـددين صحيحين فيما إذا أضفنا إلى كل من حديه عدداً صحيحاً واحداً :

$$(a, b) - (c, d) = [(a, b) + (e . f)] - [(c . d) + (e . f)] \quad (2)$$

لبرهان صحة هذه العلاقة نكتب طرفها الأيمن بالشكل التالي :

$$(a + e, b + f) - (c + e, d + f) = (a + e, b + f) +$$
$$+ (d + f, c + e) = (a + e + d + f, b + f + c + e) =$$
$$= (a + d, b + c)$$

استناداً إلى الخاصة [٢٦ - ٢] .

ولكن الطرف الأيسر من (2) :

$$(a, b) - (c . d) = (a, b) + (d, c) = (a + d, b + c)$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (2) .

٥ ـ إن عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الطرح ؛ وذلك لأن :

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad , \quad \gamma(\alpha - \beta) = \gamma[\alpha + (-\beta)] =$$
$$= \gamma\alpha + \gamma(-\beta) = \gamma\alpha - \gamma\beta$$

٣٤ ـ ٢ علاقة ترتيب Z ـ تعريف : إذا كان α, β عـــددين صحيحين فإننا نقول تعريفاً إن α أكبر من β أو β أصغر من α إذا

كان $\beta - \alpha$ عدداً موجباً أي :

$$\begin{cases} \alpha > \beta \\ \beta < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = (n, 0) \\ n \neq 0 \end{cases}$$

وبصورة خاصة فإن $\alpha = 0 - \alpha$ يؤدي إلى أن كل عدد موجب يكبر الصفر $\alpha > 0 \Leftarrow \alpha = (n, 0)$ وأن كل عـــدد سالب يصغر الصفر $\alpha < 0 \Leftarrow \alpha = (0, n)$.

لقد عرفنا بما تقدم علاقة رمزنا لها بـ ($<$) أو ($>$) ، ويبرهن بسهولة أن هذه العلاقة علاقة ترتيب كلي بالمعنى الضيق . ويمكننا أن نعرف بشكل مماثل التراجح بالمعنى الواسع فنقول :

$$\alpha \geqslant \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta \in Z^{+} + \{0\}$$

أو :

$$\alpha \geqslant \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \leqslant 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha \in Z^{-} + \{0\}$$

ويبرهن بسهولة أيضـــاً أن العلاقة $\geqslant$ هي علاقة ترتيب كلي بالمعنى الواسع أي أن كل عددين صحيحين يحققان العلاقة :

$$\alpha \geqslant \beta \quad \text{أو} \quad \beta \geqslant \alpha$$

٣٥ - ٢ نتـــائج :

١ - ينتج من العلاقة : $(m, 0) - (n, 0) = (m, n)$

أن العدد (m, n) يكون موجباً إذا كان $m > n$ ويكون سالباً إذا كان $m < n$ ويكون معدوماً إذا كان $m = n$ ، أي أن ترتيب العددين الموجبين يطابق ترتيب قيمتيها المطلقتين .

٢ ـ نستنتج من العلاقة :

$$(m\ ,\ 0) - (0\ ,\ n) = (m + n\ ,\ 0)$$

أن كل عدد موجب أكبر من أي عدد سالب .

٣ ـ نستنتج من العلاقة :

$$n > m \quad , \quad (0\ ,\ m) - (0\ ,\ n) = (n\ ,\ m)$$

ومن كون العدد $(n\ ,\ m)$ موجباً أن :

$$n > m \Rightarrow (0\ ,\ m) > (0\ ,\ n)$$

ونذكر ذلك بقولنا : « إن العدد السالب الأصغر بالقيمة المطلقة هو الأكبر بالقيمة الحقيقية » .

مثال :

$$-15 < -3 < 0 < 5 < 15$$

٣٦ ـ ٢ خواص علاقة الترتيب على Z :

١ ـ $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

وذلك لأن : $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$

و : $\alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) > 0$

ينتج مما تقدم أن :

$$\alpha + \beta > \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + (-\beta) > \gamma + (-\beta) \Leftrightarrow \alpha > \gamma - \beta$$

إذن يمكننا أن ننقل حداً من أحد طرفي متراجحة إلى الطرف الآخر بعد أن نبدل إشارته .

٢ ـ يمكن اضافة متراجحتين من اتجاه واحد ، طرفاً الى طرف .

في الحقيقة :

$$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

$$\gamma > \delta \Rightarrow \beta + \gamma > \beta + \delta$$

وبما أن علاقة الترتيب $>$ متعدية فإننا نستنتج من العلاقة السابقة :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

وهو المطلوب برهانه .

٣ ـ إذا ضربنا طرفي متراجحة ، حداها عددان صحيحان ، بعدد موجب فإننا نحصل على متراجحة صحيحة .

في الحقيقة إذا كان $0 < \mu$ فإن :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \mu(\alpha - \beta) > 0 \Leftrightarrow \mu\alpha - \mu\beta > 0$$

$$\Leftrightarrow \mu\alpha > \mu\beta$$

تمارين محلولة

٣٩ برهن أن مجموعة الأعداد الطبيعية مجموعة غير منتهية .

الحل : تحوي المجموعة N على الأقل عنصراً واحداً هو الصفر (حسب N_1) . وبحسب المبدأ (N_2) يمكننا أن نجد العدد الذي يلي الصفر ولنرمز له بـ (a_1) ثم العـــدد الذي يلي (a_1) ولنرمز له بـ (a_2) وهكذا . ولنبرهن أن هذا يعطينا باستمرار أعداداً جديدة ، أي أننا سوف لن نقع على عدد سبق تكوينه . لنفرض جدلاً أننا وقعنا لأول مرة في هذا البناء على عدد a_{n+1} يلي آخر a_n كان قد سبق أن مررنا به وليكن مثلاً :

$$a_{n+1} = a_p \qquad n \geqslant p$$

إن $p \neq 0$ لأن $a_0 = 0$ لا يلي أي عـــدد من N كما أن $p \neq n$ لأن $p = n$ يعني أن a_n يلي نفسه وبما أن a_n يلي a_{n-1} فسوف يكون حسب (N_4) :

$$a^+_{n-1} = a_n \quad , \quad a_n^+ = a_n \Rightarrow a_{n-1} = a_n$$

وهذا مخالف لما فرضناه من أن هذه الحادثة تقـــع لأول مرة من أجل a_{n+1} .

إذا كان $p \neq 0$ و $p \neq n$ فسوف يكون $0 < p < n$ ولنبرهن استحالة ذلك . ينتج عن هذا الفرض وعن (N_4) :

$$a_n^+ = a_p \quad , \quad a^+_{p-1} = a_p \Rightarrow a_n = a_{p-1}$$

وتعني هذه النتيجة أن هذه الحادثة وقعت من أجل a_n قبل وقوعها من أجل a_{n+1} وهذا مخالف لما فرضناه .

ينتج مما تقدم أننا خلال تكوين مجموعة الأعداد الطبيعية بحسب المبدأ N_2 : سوف لن نقع على عدد مر معنا . وبما أنه لايوجد مايمنع من استمرار عملية التكوين وإيجاد أعداد جديدة فإن المجموعة N غير منتهية .

• ٤ - برهن بطريقة التراجع أنه مهما كان العدد الطبيعي n :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

الحل : إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ إذ أن :

$$1 \times 1! = (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$$

لنفرض أن هذه العلاقة صحيحة من أجل $n = p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $n = p+1$.

الفرض :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + p \times p! = (p+1)! - 1$$

لنجمع إلى طرفي هذه المساواة العدد $(p+1).(p+1)!$ فنجد :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + p \times p! + (p+1) \times (p+1)!$$
$$= (p+1)(p+1)! + (p+1)! - 1 = (p+1)!(p+1+1) - 1$$
$$= (p+2)! - 1$$

وهذا ما يثبت أن العلاقة المفروضة صحيحة من أجل $n = p+1$ بفرض صحتها من أجل $n = p$. واستناداً إلى مبدأ التراجع تكون صحيحة من

أجل كل قيمة لـ n .

٤١ - برهن بطريقة التراجع صحة العلاقة التالية (بفرض α عنصراً كيفياً من N) :

$$\sum_{\alpha}(n) = \sum_{h=1}^{n} h(h+1)\dots(h+\alpha-1)$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\, n(n+1)\dots(n+\alpha)$$

الحل : أن هذه العلاقة صحيحة من أجل n = 0 و n = 1 لأنها تأخذ الشكل :

$$1.2.3\dots(1+\alpha-1) = \frac{1}{\alpha+1}\, 1.2\dots\alpha.(1+\alpha)$$

أو :

$$1.2.3\dots\alpha = 1.2\dots\alpha$$

لنفرض أنها صحيحة من أجل n = p ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل n = p+1 أي لنفرض :

$$\sum_{h=1}^{p} h(h+1)\dots(h+\alpha-1) = \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\, p(p+1)\dots(p+\alpha)$$

ولنبرهن صحة العلاقة :

$$\sum_{h=1}^{p+1} h(h+1)\dots(h+\alpha-1) = \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}(p+1)(p+2)\cdots(p+\alpha)\ (p+$$

لنجمع إلى طرفي العلاقة (1) الحد $(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha)$ فيصبح طرفها الأيسر مطابقاً للطرف الأيسر من (2) وأما الطرف الأيمن فيأخذ الشكل .

$$\frac{1}{\alpha+1}\, p\,(p+1)\ldots(p+\alpha)+(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha)=$$

$$=\left(1+\frac{p}{\alpha+1}\right)(p+1)\ldots(p+\alpha)$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}(p+1)(p+2)\ldots(p+\alpha)(p+\alpha+1)$$

وهو مطابق للطرف الأيمن من العلاقة (2) وهذا مايبرهن الاقتضاء :

$$(1) \Rightarrow (2)$$

ويبرهن صحة العلاقة المفروضة مهما كانت قيمة n وذلك استناداً إلى مبدأ التراجع .

٤٢ - برهن أن عملية جمع الأعداد الطبيعية تجميعية (قابلة للدمج) :

الحل : سنبرهن صحة العلاقة :

$$(1) \qquad \forall\, x, y, z \in N : \quad (x+y)+z=x+(y+z)$$

بطريقة التراجع :

١ - نبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $z=0$: استناداً إلى تعريف الجمع يمكننا أن نكتب :

$$(x+y)+0=x+y$$

$$x+(y+0)=x+y$$

وهذا ما يبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $z = 0$.

لنفرض (فرضية التراجع) أن العلاقة (1) قد برهنت من أجل $z = p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $z = p^+$ أي :

$$(x + y) + p = x + (y + p) \Rightarrow (x + y) + p^+ = x + (y + p^+)$$

لننطلق من الطرف الأيسر للمساواة التي يطلب برهانها فنجد على التوالي

$(x + y) + p^+ = [(x + y) + p]^+$ (تعريف الجمع)

$= [x + (y + p)]^+$ (فرضية التراجع و N_2)

$= x + (y + p)^+ = x + (y + p^+)$ (تعريف الجمع)

ونكون بذلك قد استنتجنا صحة العلاقة المطلوبة وبرهنا أن عملية الجمع قابلة للدمج .

٤٣ - برهن أن جمع الأعداد الطبيعية تبديلي :

الحل : نبرهن صحة العلاقة :

$$(1) \qquad \forall x, y \in N \quad : \quad x + y = y + x$$

بطريقة التراجع .

١ - نبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $y = 0$ أي :

$$\forall x \in N \quad : \quad x + 0 = 0 + x$$

استناداً إلى تعريف الجمع $x + 0 = x$ لذا يكفي أن نبرهن أنه :

$$\forall x \in N \quad : \quad 0 + x = x \tag{2}$$

في الحقيقة إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 0$ أي :

(بحسب A_1) $\qquad 0 + 0 = 0$

لنبرهن صحتها من أجل x^+ استناداً إلى فرض صحتها من أجل x أي :

$$0 + x = x \Rightarrow 0 + x^+ = x^+$$

(بحسب A_2) $\qquad 0 + x^+ = (0 + x)^+$

(فرضية التراجع) $\qquad (0 + x)^+ = x^+$

وهذا يؤدي إلى العلاقة : $\qquad 0 + x^+ = x^+$

فالعلاقة (2) صحيحة من أجل كل x من N .

٢ ـ لنبرهن صحة العلاقة (1) من أجل $y = 1$ أي :

$$x + 1 = 1 + x \tag{3}$$

نبرهن صحة هذه العلاقة بطريقة التراجع فنقول إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 0$ استناداً إلى ما سبق أي :

$$0 + 1 = 1 + 0$$

لنبرهن صحة العلاقة (3) من أجل $x = p^+$ استناداً إلى فرض صحتها من أجل $x = p$ أي :

$$p + 1 = 1 + p \Rightarrow p^+ + 1 = 1 + p^+ \tag{4}$$

في الحقيقة يمكننا أن نكتب :

(فرضية التراجع) $\qquad (p + 1)^+ = (1 + p)^+$

ولكن : $p + 1 = p^+ \Rightarrow (p + 1)^+ = (1 + p)^+ = p^+ + 1$

ولدينا (حسب A_2) $(1 + p)^+ = 1 + p$

وينتج عن العلاقتين الأخيرتين أن : $1 + p^+ = p^+ + 1$

وهو المطلوب إثباته .

٣ ـ لنفرض الآن أن العلاقة (1) صحيحة من أجل $y = p$ ولنبرهن صحتها من أجل $y = p^+$ أي لنبرهن صحة :

$$x + p = p + x \Rightarrow x + p^+ = p^+ + x \qquad (5)$$

في الحقيقة يمكننا أن نكتب :

(حسب A_2) : $x + p^+ = (x + p)^+$

(الخاصة التجميعية) $p^+ + x = (p + 1) + x = p + (1 + x)$

(استناداً إلى (3)) $= p + (x + 1) = p + x^+ = (p + x)^+$

(فرضية التراجع) $(x + p)^+ = (p + x)^+$

وهذا مايؤدي إلى العلاقة (5) من أجل كل قيمة لـ y ويبرهن الخاصة المطلوبة .

٤٤ ـ a , b عددان طبيعيان برهن صحة العلاقة :

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \qquad (1)$$

الحل : إن الانتقال من اليمين إلى اليسار واضح ، فلنبرهن صحة العلاقة :

$$a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \qquad (2)$$

لنفرض جدلاً أن $b \neq 0$ وهذا يعني حسب (N_3) وجود عدد

طبيعي مثل c بحيث يكون $c^{+} = b$ وتأخذ المساواة الأولى من العلاقة (2) الشكل :

$$a + c^{+} = (a + c)^{+} = 0 \qquad \text{(تعريف الجمع)}$$

وهذا مخالف للمبدأ N_3) ويؤدي إلى أن b لا يمكن إلا أن يكون معدوماً . وبالطريقة ذاتها نبرهن أن $a = 0$.

٤٥ - a و b عددان طبيعيان برهن صحة العلاقتين :

$$a + x = b + x \Rightarrow a = b$$

$$x + a = x + b \Rightarrow a = b$$

بما أن عملية الجمع تبديلية فإنه يكفي أن نبرهن واحداً من هذين الاقتضاءين ولنبرهن الأول مثلاً :

إن هذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 0$ ولنبرهن صحتها من أجل x^{+} استناداً إلى فرض صحتها من أجل x أي :

$$[a + x = b + x \Rightarrow a = b] \Rightarrow [a + x^{+} = b + x^{+} \Rightarrow a = b]$$

في الحقيقة لدينا :

$$a + x^{+} = b + x^{+} \Rightarrow (a + x)^{+} = (b + x)^{+} \qquad \text{(حسب } A_2 \text{)}$$

$$\Rightarrow a + x = b + x \qquad \text{(حسب } N_4 \text{)}$$

$$\Rightarrow a = b \qquad \text{(فرضية التراجع)}$$

وبما أن العلاقة ⇐ متعدية فيكون قد ثبت المطلوب .

٤٦ - برهن أن عملية ضرب الأعداد الطبيعية عملية توزيعية على جمعها

من اليسار أي :

$$(1) \qquad \forall a, b, c \in N : a(b+c) = ab + ac$$

بما أن جمع الأعداد تبديلي فإنه يمكننا أن نعتبر واحداً من العددين b, c ثابتاً والثاني متحولاً ثم نعيد البرهان بعدأن نبادل بين موضعي العددين (b, c) كما أننا نعتبر a ثابتاً ولكنه كيفياً ونبرهن هذه الخاصة بطريقة التراجع .

إن العلاقة (1) صحيحة من أجل $c = 0$ إذ أن :

$$a(b+0) = ab \quad \text{و} \quad ab + a.0 = ab$$

٢ ـ لنفرض أننا برهنا صحتها من أجل $c = p$ ولنستنتج صحتها من أجل $c = p^+$ أي لنثبت :

$$a(b+c) = ab + ac \Rightarrow a(b+c^+) = ab + ac^+$$

$a(b+c^+) = a(b+c)^+$ $\qquad (A_2)$

$= a(b+c) + a$ $\qquad (P_2)$

$= ab + ac + a$ $\qquad$ (فرضية التراجع)

$= ab + ac^+$ $\qquad (P_2)$

ونكون بذلك قد برهنا المطلوب :

٤٧ ـ برهن أن ضرب الأعداد الطبيعية عملية توزيعية من اليمين على جمعها أي :

$$(1) \qquad \forall a, b, c \in N : (a+b)c = ac + bc$$

نعتبر في هذه العلاقة a, b ثابتين ولكنها اختياريان و c متحولاً

ولنبرهن هذه الخاصة بطريقة التراجع بعد أن نلاحظ بداهة صحتها من أجل $c = 0$:

١ - بما أن العدد (1) عنصر حيادي في الضرب فإنه يكون :

$$(a + b) . 1 = a + b = a . 1 + b . 1$$

وهذا ما يؤكد صحة العلاقة (1) من أجل $c = 1$.

لنبرهن صحة الاقتضاء :

$$[(a + b) p = a p + b p] \Rightarrow [(a + b) p^{+} = a p^{+} + b p^{+}]$$

$(a + b) p^{+} = (a + b) . p + a + b$ (p_2)

$= a p + b . p + a + b$ (فرضية التراجع)

$= (a p + a) + (b p + b)$ (الجمع تجميعي وتبديلي)

$= a . p^{+} + b . p^{+}$ (P_2)

٤٨ - برهن أن عملية ضرب الأعداد الطبيعية عملية توزيعية بالنسبة لطرحها أي :

$$\forall x , y , z \in N \quad , \quad y \geqslant z \ : \ x (y - z) = x y - x z$$

الحل : بما أن $y \geqslant z$ فإنه يوجد عدد طبيعي d بحيث يكون :

$y = z + d \Leftrightarrow d = y - z$ (تعريف الطرح)

$x y = x (z + d) = x z + x d$ (الضرب توزيعي بالنسبة للجمع)

$x y - x z = x d$ (تعريف الطرح)

ومنه نجد المطلوب : $x y - x z = x (y - z)$

٤٩ ـ برهن أن عملية ضرب الأعـداد الطبيعية منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة عليها أي :

$$\forall c \in N \quad : \quad a \geqslant b \Rightarrow a.c \geqslant b.c$$

الحل : يمكننا بحسب ما رأيناه كتابة العلاقات التالية :

$a \geqslant b \Rightarrow \exists\, d \in N \; : \; a = b + d$ (تعريف علاقة الترتيب)

$a = b + d \Rightarrow a.c = bc + dc$ (الضرب قابل للتوزيع)

$\Rightarrow ac \geqslant bc$ (تعريف علاقة الترتيب)

يبرهن بالطريقة ذاتها على أن عملية ضرب الأعـداد الطبيعية منسجمة مع علاقة الترتيب $>$ المعرفة على N^* .

٥٠ ـ برهن أنه إذا كان جداء عددين طبيعيين صفراً فإن أحدهما على الأقل صفر .

الحل : لنفرض جدلاً أن $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a.b = 0$ وهذا يعني أن العدد b يلي عـدداً آخر c (قد يكون صفراً) أي $c^+ = b$ ويكون عندها :

$a.b = a.c^+ = ac + a$ (بحسب المبدأ P_2)

إن $ac + a$ لا يمكن أن يكون معدوماً لأننا فرضنا $a \neq 0$ وهذا مخالف لما فرضناه من كون $a.b = 0$ أي أن فرضنا $b \neq 0$ غـير منسجم مع الفرض الأصلي $ab = 0$ فلا بـد إذن من كون $b = 0$ وإذا

كان $b \neq 0$ فلا بد من كون $a = 0$ وهو المطلوب برهانه .

٥١ - برهن إن عملية ضرب الأعداد الطبيعية منسجمة مع علاقة الترتيب المعرفة على هذه المجموعة .

الحل : يمكننا استناداً إلى التعليل المكتوب على اليمين أن نعطي العلاقات التالية :

(تعريف التراجح) $a, b \in N : a \geqslant b \Leftrightarrow \exists x \in N : a = b + x$

(عملية الجمع وحيدة القيمة) $\forall c \in N : a = b + x \Leftrightarrow ca = cb + cx$

(تعريف التراجح) $c a = c b + c x \Leftrightarrow c a \geqslant c b$

ينتج عن هذه العلاقات العلاقة :

$$a \geqslant b \Rightarrow c a \geqslant c b$$

وهو المطلوب برهانه .

٥٢ - برهن أن ضرب الأعداد الطبيعية عملية تبديلية أي :

$$\forall x, y \in N : x . y = y . x \qquad (1)$$

الحل : نلاحظ أن هذه العلاقة صحيحة من أجل $y = 0$ مهما كان x فلنبرهن أولاً صحتها من أجل $y = 1$ أي :

$$\forall x \in N : x . 1 = 1 . x \qquad (2)$$

١ - إن هـذه العلاقة صحيحة من أجل $x = 1$ فلنفرض صحتها من أجل $x = p$ ولنستنتج من ذلك صحتها من أجل $x = p^+$ أي لنـبرهن صحة العلاقة :

$$p \cdot 1 = 1 \cdot p \Rightarrow p^+ \cdot 1 = 1 \cdot p^+$$

(P_1 والعنصر الحيادي) : $1 \cdot p^+ = 1 \cdot p + 1 = p + 1$

(العنصر الحيادي) $p^+ \cdot 1 = (p+1) \cdot 1 = p + 1$

٢ - لنفرض صحة العلاقة (1) من أجل $y = p$ ولنبرهن صحتها من أجل $y = p^+$ أي لنبرهن :

$$\forall p \in N \ : \ x \cdot p = p \cdot x \Rightarrow x \cdot p^+ = p^+ \cdot x$$

(بحسب P_2) $x \cdot p^+ = x \cdot p + x$

(التوزيع من اليمين) $p^+ \cdot x = (p+1)\, x = p\,x + x = x\,p + x$

٥٣ - إذا كان a ، b عددين طبيعيين، برهن على وجود عدد طبيعي وحيد q يحقق العلاقة :

$$b\,q \leqslant a < b\,(q+1)$$

الحل : لتكن $M(b)$ مجموعة مضاعفات b .

$$M(b) = \{\, 0 \,,\, b \,,\, 2b \,,\, \ldots \,,\, n\,b \,,\, \ldots \,\}$$

ولنرمز بـ $\mathfrak{T}$ للمجموعة الجزئية من مضاعفات b التي لاتزيد على a أي :

$$x \in \mathfrak{T} \iff [\, x \in M(b) \,,\, x \leqslant a \,]$$

إن $\mathfrak{T}$ غير خالية لأنها تحوي على الأقل الصفر وهي منتهية لأنها محدودة

من الأعلى بـ a فسيكون لهـا عنصر أعظم نرمز له بـ m وهو أكبر مضاعف لـ b يصغر أو يساوي a .

بما أن $m \in M(b)$ فإنه يوجد عدد وحيد q بحيث يكون :

$$m = q . b$$

وسيكون بالبداهة $q . b \leqslant a$

فلنبرهن على أن $(q + 1)\ b > a$

في الحقيقة إذا لم يكن ذلك فسوف يكون :

$$(q + 1)\ b \leqslant a$$

ولن يكون q . b هو العنصر الأعظم من $\mathfrak{X}$ خلافاً لما فرضناه وهذا يعني أنه لا يمكن إلا أن يكون المطلوب برهانه وهو :

$$q . b \leqslant a < (q + 1)\ b$$

٥٤ - برهن أن مجموعة مضاعفات العدد n ، كمجموعة جزئية من N ، مستقرة بالنسبة لجمع وضرب الأعداد الطبيعية .

الحل : إذا كان $a , b \in M(n)$ فإنه يمكن إيجاد عددين مثل q' , q بحيث يكون :

$$a = q\, n \quad , \quad b = q'\, n$$

وبما أن الضرب توزيعي على الجمع :

$$a + b = q\, n + q'\, n = (q + q')n \in M(n)$$

وبما أن الضرب تجميعي :

$$a . b = q\, n . q'\, n = (q\, n\, q')\, n \in M(n)$$

وهذا يثبت المطلوب .

٥٥ - برهن أن ضرب الأعداد الصحيحة تبديلي :

الحل : إذا عدنا إلى تعريف الضرب على N^2 [٢-٢٧] فسوف نجد :

$$(a , b) \times (c , d) = (a c + b d , \quad a d + b c)$$

$$(c , d) \times (a , b) = (c a + d b , \quad d a + c b)$$

بما أن ضرب الأعداد الطبيعية تبديلي فإن الناتجين السابقين متساويان أي :

$$(a c + b d , a d + b c) = (c a + d b , d a + c b)$$

$$\Leftrightarrow (a , b) \times (c , d) = (c , d) \times (a , b)$$

وينتج عن هذه العلاقة حسب [٢-٢٧] :

$$(\widehat{a , b}) \times (\widehat{c , d}) = (\widehat{c , d}) \times (\widehat{a , b})$$

وهذا ما يبرهن على أن ضرب الأعداد الصحيحة تبديلي .

٥٦ - نعرف على Z عملية داخلية $\top$ نرمز لهـا بـ max ، نربط بكل زوج من الأعداد الصحيحة (x , y) أكبر هذين العددين ونكتب :

$$x \top y = \max (x , y)$$

ادرس توزيع جمع وضرب الأعداد الصحيحة على هـذه العملية وبين متى تكون هذه العملية منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة على Z .

الحل : إن الجمع في Z توزيعي على $\top$ لأنه من الواضح أن :

$$z + (x \top y) = (z + x) \top (z + y)$$

$$(x \top y) + z = (x + z) \top (y + z)$$

لأنه لو كان x هو أكبر العددين x , y فإن x + z هو أكبر العددين x + z , y + z وذلك لأنه :

$$\forall x , y , z \in N \ : \ x > y \Rightarrow x + z > y + z$$

أما الضرب فهو عملية توزيعية على $\top$ في Z^+ :

$$z > 0 \qquad z . (x \top y) = (z . x) \top (z . y)$$

$$(x \top y) . z = (x . z) \top (y . z)$$

لأن :

$$z > 0 \ , \ \forall x , y , z \in N \ : \ x > y \Rightarrow x . z > y . z$$

أما في الحالة التي يكون فيها $z < 0$ فإن عملية الضرب غير قابلة للتوزيع بالنسبة لـ $\top$ المعرفة في هذا التمرين .

إن العلاقة $\top$ منسجمة مع علاقة الترتيب $\leqslant$ المعرفة على Z لأن :

$$x \geqslant y \Rightarrow \max (x , z) \geqslant \max (y , z) \Leftrightarrow x \top z \geqslant y \top z$$

لأنــه انسجاماً مع فرضنا $x \geqslant y$ ، سيكون وضع الأعــداد الثلاثة x , y , z بالنسبة لبعضها واحداً من الأشكال الثلاثة :

$$z \geqslant x \geqslant y \ , \ x \geqslant z \geqslant y \ , \ x \geqslant y \geqslant z$$

وفي كل حالة من هذه الحالات الثلاث يكون الاقتضاء السابق محققاً وذلك إذا اعتبرنا تمشياً مع تعريف علاقة الترتيب $\leqslant$ أن :

$$\max (x , x) = x$$

٥٧ - برهن أنه ليكون العددان الطبيعيان a , b متوافقين (قياس n)

يلزم ويكفي أن يقبل فضلها القسمة على n أي :

$$a \geqslant b \quad , \quad a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \in M(n)$$

الحل : لنجر التقسيم الاقليدي لكل من a , b على n فنجد مثلاً :

$$a = nq + r \quad , \quad b = nq' + r' \quad , \quad q \geqslant q'$$

وانطلاقاً من تعريف التوافق وقابلية الضرب للتوزيع على الطرح [٤٨] :

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow r = r' \Rightarrow a - b = (q - q')\, n$$

$$\Leftrightarrow a - b \in M(n)$$

وعلى العكس :

$$(1) \qquad a - b \in M(n) \Leftrightarrow (q - q')\, n + r - r' \in M(n)$$

لا يمكن أن يتحقق الانتماء الأخير إلا إذا كانت حالة من الحالات الثلاث :

١ - $r - r' = 0$

٢ - $r > r'$, $r - r' \in M(n)$ ولكن $r < n \Rightarrow r - r' < n$

وهذا يعني أن $r - r' = 0$

٣ - $r < r'$ $r' - r \in M(n)$ ولكن $r' < n \Rightarrow r' - r < n$ أي:
$r' - r = 0$

وهذا ما يؤكد دوماً صحة العلاقة التالية :

$$a - b \in M(n) \Leftrightarrow r - r' = 0 \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

٥٨ - برهن ما يلي :

$$\forall c \in N : \quad a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى الخاصة [٣٢ - ٢ ، ٤] من خواص الطرح يمكننا أن نكتب :

$$a - b \in M(n) \Rightarrow (a + c) - (b + c) \in M(n)$$

واستناداً إلى التمرين [٩٧] يمكننا أن نكتب العلاقة التالية التي تعطي المطلوب :

$$(a + c) - (b + c) \in M(n) \Leftrightarrow a + c \equiv b + c \pmod{n}$$

٥٩ - برهن أنه يمكن جمع علاقتي توافق (قياس n) (أي أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الجمع [٣٧ - ١]) .

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \\ a' \equiv b' \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + a' \equiv b + b' \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى التمرين (٥٨) يمكننا أن نكتب :

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a + a' \equiv b + a' \pmod{n}$$

$$a' \equiv b' \pmod{n} \Rightarrow b + a' \equiv b + b' \pmod{n}$$

وبما أن علاقة التوافق متعديه فإننا نستنتج من هاتين العلاقتين العلاقة المطلوبة .

٦٠ - برهن ما يلي :

$$\forall c \in N : \; a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى التمرين [٥٧] وخواص مضاعفات عدد يمكننا

أن نكتب :

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a-b) \in M(n) \Rightarrow c\,(a-b) \in M(n)$$

وبما أن ضرب الأعداد الطبيعية توزيعي على طرحها [٤٨] فإن

$$c\,(a-b) \in M(n) \Leftrightarrow c\,a - c\,b \in M(n) \Leftrightarrow c\,a \equiv c\,b \pmod{n}$$

وهو المطلوب برهانه .

٦١ - برهن أنه يمكن ضرب علاقتي توافق (قياس n) معروفتين على N ، أي (أن علاقة التوافق منسجمة مع عملية الضرب [٣٧ - ١]) :

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a\,c \equiv b\,d \pmod{n}$$

الحل : يمكننا أن نكتب استناداً إلى التمرين (٥٦) :

$$a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a\,c \equiv b\,c \pmod{n}$$

$$c \equiv d \pmod{n} \Rightarrow b\,c \equiv b\,d \pmod{n}$$

وبما أن علاقة التوافق علاقة متعدية فإن العلاقتين الأخيرتين تؤديان إلى المطلوب .

٦٢ - برهن أنه يمكن رفع علاقة توافق (قياس n) إلى قوة أسها عدد طبيعي أي :

$$\forall x \in N : \; a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow a^x \equiv b^x \pmod{n}$$

الحل : استناداً إلى التمرين [٦١] يمكننا أن نضرب x علاقة

من الشكل :
$$a \equiv b \pmod{n}$$

فنحصل على المطلوب $a^x \equiv b^x \pmod{n}$

٦٣ - إذا كان n عدداً طبيعياً ادرس البواقي الممكنة للتقسيم الاقليدي لـ n^2 على 5 ولـ n^3 على 7 .

الحل : إذا رمزنا لباقي قسمة العدد n على 5 بـ r فسوف يكون :

$$n \equiv r \pmod{5} \quad , \quad r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$n^2 \equiv r^2 \pmod{5}$$ (علاقة التوافق قابلة للرفع)

إن r' باقي قسمة العدد n^2 على 5 يساوي باقي قسمة r^2 على 5 وإذا كان $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ فإن $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$ و

$$r' \equiv r^2 \pmod{5} \Rightarrow r' \in \{0, 1, 4, 4, 1\}$$

وإذا رمزنا بـ h لباقي قسمة العدد n على 7 فسوف يكون :

$$n \equiv h \pmod{7} \quad : \quad h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n^3 \equiv h^3 \pmod{7}$$ (علاقة التوافق قابلة للرفع)

وإذا رمزنا بـ h' لباقي قسمة n^3 على 7 د . . يكون :

$$h' \equiv h^3 \pmod{7}$$

وإذا كان : $h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فإن :

$$h^3 \in \{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216\}$$

$h' \equiv h^3 \pmod 7$ $\qquad h' \in \{0, 1, 1, 6, 1, 6, 6\}$

أي : $\qquad h' \in \{0, 1, 6\}$

٦٤- أوجد العددين الصحيحين $x = \alpha$ ، $y = \beta$ المحققين العلاقة :

$$3x - 4y = 7$$

الحل : يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل :

$$3x = 4y + 7 \qquad (1)$$

وهذا يعني إيجاد حد مضاعفات الـ (4) بحيث إذا أضفنا إليه 7 أصبح من مضاعفات العدد (3) ونلاحظ بسهولة أن $y = 2$ يجعل الطرف الأيمن من (1) من مضاعفات الـ (3) ويصبح $x = 5$ وبذلك نجد واحداً من حلول هذه المعادلة : ($x = 5$, $y = 2$) . لايجاد بقية الحلول نفرض :

$$x = 5 + X \quad , \quad y = 2 + Y$$

فتأخذ عندها المعادلة (1) الشكل :

$$3X = 4Y$$

وهذا يعني : $\qquad 3X \equiv 0 \pmod 4$

وبما أن : $\qquad X \equiv X \pmod 4$

وبما أنه يمكن جمع علاقتي توافق $\qquad 4X \equiv X \pmod 4$

أي $\qquad X \in M(4)$

وبالطريقة السابقة ذاتها نجد $\qquad Y \in M(3)$

إذا فرضنا $X = 4 . h$ يكون $Y = 3 . h$ حيث h عدد كيفي من N

فتكون مجموعة حلول المعادلة المفروضة هي :

$$x = 5 + 4h \quad , \quad y = 2 + 3h$$

٦٥- أوجد عددين طبيعيين a , b يحققان العلاقة :

$$ab = a + b$$

الحل : إذا استبعدنا الحل البدهي $a = 0 \; , \; b = 0$ فإننا نلاحظ أنه لا يمكن أن يكون واحد منهما أو كل منهما مساوياً الواحد ، فلنبحث عن الحل الذي يحقق :

$$a > 1 \quad , \quad b > 1$$

لنكتب العلاقة المفروضة بالشكل :

$$ab - a = b \Leftrightarrow a(b - 1) = b$$

ينتج عن هذه العلاقة أن b من مضاعفات $b - 1$ أي :

$$b \equiv (b - 1) \pmod{b - 1} \Leftrightarrow b - (b - 1) \in M(b - 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 \in M(b - 1)$$

وبما أن العدد واحد مضاعف لنفسه فقط فإن هذه العلاقة تؤدي إلى :

$$1 = b - 1 \Leftrightarrow b = 2$$

ونجد بالطريقة السابقة ذاتها أن $a = 2$.

٦٦- b , a عددان طبيعيان $(a > b)$ وبرهن أن واحداً ، على الأقل ، من الأعداد :

$ab \; , \; a + b \; , \; a - b$ يقبل القسمة على 3 .

الحل : إن باقي قسمة كل عدد على 3 هو عنصر من المجموعة $\{0,1,2\}$ ومن الواضح أنه إذا كان باقي قسمة أحد العددين a, b على 3 صفراً فإن الجداء ab يقبل القسمة على 3 . لندرس بعد ما تقدم الحالتين الباقيتين :

١ ـ إذا كان $a \equiv 1 \pmod 3$ ، $b \equiv 1 \pmod 3$

فإن : $a \equiv b \pmod 3$ ، $a - b \in M(3)$

٢ ـ إذا كان $a \equiv 1 \pmod 3$ ، $b \equiv 2 \pmod 3$

فإن : $a + b \equiv 0 \pmod 3$ ، $a + b \equiv 3 \pmod 3$

نتابع بالطريقة ذاتها دراسة بقية الحالات ونجد المطلوب .

إذا قبل كل من a, b القسمة على 3 فإن كل الأعـــداد الثلاثة ab ، $a + b$ ، $a - b$ تقبل القسمة على 3 (لماذا ؟) .

٦٧ـ ماهو باقي قسمة العدد 4^{738} على العدد 11 ؟

الحل : لنبحث عن أصغر قوة للعـدد 4 يكون باقي قسمتها على 11 أصغر ما يمكن علماً بأن القوى المختلفة للعدد 4 لا تقبل القسمة على 11 (لماذا ؟) لنكتب إذن :

$$4 \equiv 4 \pmod{11} \quad , \quad 4^2 \equiv 5 \pmod{11} \quad , \quad \ldots\ldots \quad ,$$
$$4^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

فنجد أن القوة الخامسة لـ 4 توافق الواحد قياس 11 وبما أن :

$$738 = 147 \,.\, 5 + 3$$

فإنه يمكننا أن نكتب :

(علاقة التوافق قابلة للرفع) :

$$4^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow (4^5)^{147} \equiv (1)^{147} \pmod{11}$$

أي : $4^{735} \equiv 1 \pmod{11}$

$$4^3 \equiv 9 \pmod{11}$$

(ضرب علاقتي توافق) $4^{738} \equiv 9 \pmod{11}$

وهذا ما يظهر لنا أن باقي قسمة العدد المفروض على 11 هو 9 .

٦٨- برهن أنه مهما كان العدد الطبيعي n فإن العددين :

$$3^{2n} - 2^n \quad , \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} \qquad (1)$$

يقبلان القسمة على 7 وأنه إذا كان $n > 0$ فإن العدد :

$$3^{2n} + 2^{6n-5} \qquad (2)$$

يقبل القسمة على 11 .

الحل : لننطلق من العلاقة : $3^2 \equiv 2 \pmod 7$

(رفع علاقة التوافق) $3^{2n} \equiv 2^n \pmod 7 \qquad (3)$

(التمرين رقم ٥٧) $3^{2n} - 2^n \in M(7)$

لبرهان قابلية قسمة العدد الثاني المفروض على 7 ننطلق من العلاقة (3) :

(انسجام علاقة التوافق مع الضرب) $3 \cdot 3^{2n} \equiv 3 \cdot 2^n \pmod 7$

(انسجام علاقة التوافق مع الجمع)

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv (3 \cdot 2^n + 2^{n+2}) \pmod 7$$

أو : $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 7 \cdot 2^n \pmod 7 \equiv 0 \pmod 7$

وهذا ما يبرهن على أن العدد الثاني من (1) يقبل القسمة على 7 .

نبرهن قابلية قسمة العدد (2) على 11 بطريقة التراجع بعد أن نلاحظ أن هذه الخاصة محققة من أجل $n = 1$ ($3^2 + 2^1 = 11$)

فلنبرهن صحة هذه الخاصة من أجل $n = p + 1$ استناداً إلى فرض صحتها من أجل $n = p$ أي لنبرهن صحة العلاقة :

$$3^{2p} + 2^{6p-5} \in M(11) \Rightarrow 3^{2p+2} + 2^{6p+1} \in M(11)$$

في الحقيقة إن :

$$3^{2p} + 2^{6p-5} \in M(11) \Rightarrow 9 \,.\, 3^{2p} + 9 \,.\, 2^{6p-5} = 3^{2p+2} + 9 \,.\, 2^{6p-5} \in M(11)$$

وبما أن :

$$3^{2p+2} + 2^{6p+1} = 3^{2p+2} + 9 \,.\, 2^{6p-5} + (2^{6p+1} - 9 \,.\, 2^{6p-5})$$

و :

$$2^{6p+1} - 9 \,.\, 2^{6p-5} = (2^6 - 9)\, 2^{6p-5} = 55 \,.\, 2^{6p-5} \in M(11)$$

فإن العدد (2) سيكون مجموع مضاعفين للعدد 11 فهو مضاعف للعدد 11 ويثبت المطلوب .

تمارين للحل

٦٩- برهن بطريقة التراجع صحة العلاقات التالية حيث n عـــدد طبيعي كيفي :

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}\, n(n+1)$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)\,(2n+1)$$

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \tfrac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2$$

$$S_1'(n) = 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$S_1'(n) = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \tfrac{1}{3}\, n(2n-1)\,(2n+1)$$

$$S_3'(n) = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^3\,(2n^2-1)$$

$$\Sigma_2(n) = 1\,.\,2 + 2\,.\,3 + \ldots + n(n+1) = \tfrac{1}{3}\, n(n+1)\,(n+2)$$

$$\Sigma_3(n) = 1\,.\,2\,.\,3 + 2\,.\,3\,.\,4 + \ldots + n(n+1)\,(n+2) =$$

$$\tfrac{1}{4}\, n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$$

$$2\,.\,6\,.\,10 \ldots (4n-2) = (n+1)\,(n+2) \ldots (2n)$$

٧٠- حل في المجموعة Z المعادلات التالية :

$$5x + 3y = 9 \quad , \quad 12x - 5y = 11 \quad , \quad 24x - 13y = 7$$

$$15x + 11y = 12 \quad , \quad 3x - 5y = 7 \quad , \quad 7x + 4y = -8$$

٧١- هل العلاقة "تقسم" المعرفة في مجموعة الأعـــداد الصحيحة هي علاقة ترتيب كما هو الحال في N ؟

وهل هذه العلاقة منسجمة مع الضرب والجمع في المجموعة Z ؟

٧٢ - ١ - ليكن k عدداً صحيحاً . برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي يقسم عدد صحيح a عدداً صحيحاً آخر b هو أن يقسم العدد a العدد $b - k a$.

٢ - أوجد $x \in Z$ بحيث يقسم العدد $x - 5$ العدد $x + 7$.

٣ - أوجد $x \in Z$ بحيث يقسم العدد $x - 4$ العدد $x + 9$.

٤ - أوجد $x \in Z$ بحيث يقسم العدد $x + 2$ العدد $4x - 6$.

٧٣ - ما هو باقي التقسيم الإقليدي على 11 للأعداد :

$$4^{1124} \quad , \quad (738)^4 \quad , \quad (1184)^4$$

٧٤ - شكل جدول ضرب أصناف التوافق (قياس 8) وبرهن أنه يوجد صنفين من هذه الأصناف :

$(a) \neq (o)$ ، $(b) \neq (o)$ بحيث يكون $(a) . (b) = (o)$

ادرس عمليتي جمع وضرب الأصناف C_8 على المجموعة $C_8 - \{(0)\}$.

عمم ما تقدم وأوجد الشرط اللازم والكافي الذي يجب أن يتحلى به العدد n ليكون في C_n صنفان غير معدومين جداؤهما معدوم .

٧٥ - شكل جدول ضرب أصناف التوافق (قياس ٧) وادرس على $C_7 - \{(0)\}$ خواص ضرب الأصناف .

٧٦ - حل في المجموعة N كلا من المعادلتين :

$$x^2 - y^2 = 120 \quad , \quad x^2 + x y = 240$$

٧٧ - عين قيمة العدد الطبيعي a ليكون للمعادلة التاليـــة حل في

المجموعة N :

$$x^2 - a\,x - 152 = 0$$

٧٨- إذا كان A و B مجموعتين جزئيتين من N ورمزنا بـ k . A لمجموعة الأعداد الطبيعة التي تنتج عناصرها عن عناصر A بضرب كل منها بـ k ، برهن صحة العلاقة :

$$k\,(A \cup B) = (k\,A) \cup (k\,B)$$

٧٩- إذا رمزنا بـ D(a) لمجموعة قواسم a وبـ D(a , b) لمجموعة القواسم المشتركة لـ (a , b) برهن صحة العلاقتين :

$$k\,D(a) \subset D(k\,a)$$

$$k\,D(a\,,\,b) \subset D(k\,a\,,\,k\,b)$$

حيث لـ k D(a) المعنى الذي بيناه في التمرين السابق .

٨٠- برهن أنه مهما كان العدد n فإن الأعـداد التالية تقبل القسمة على 6 .

$$a = n(n+1)\,(n+2) \quad , \quad b = n^3 + 11\,n \quad , \quad c = n(2\,n + 1\,)\,(7\,n + 1)$$

$$d = n(n+1)\,(2\,n+1)$$

٨١- أوجد أصغر الأعداد المتوافقة (قياس 5) مع الأعداد :

$$19 \quad , \quad 288 \quad , \quad 19\,.\,288 \quad , \quad 19^3\,.\,288^2$$

٨٢- برهن صحة العلاقة التـــالية حيث تعني بـ (z | t) أن z يقسـم t .

ه | ٥ و $a | c \Rightarrow a | (bx + cy)$

٨٣- أوجد حلول المعادلات التالية في المجموعة N .

(a)	$4x \equiv 3 \pmod{7}$	(e)	$153x \equiv 6 \pmod{12}$
(b)	$9x \equiv 11 \pmod{26}$	(f)	$x + 1 \equiv 3 \pmod{7}$
(c)	$3x + 1 \equiv 4 \pmod{5}$	(g)	$8x \equiv 6 \pmod{422}$
(d)	$8x \equiv 6 \pmod{14}$	(h)	$363x \equiv 345 \pmod{624}$

الفصل الثالث

نظرية الزمر

مقدمة :

لقد رأينا في الفصل الأول أن من البنى الجبرية ما هو مزود بعملية جبرية واحدة (أي بقانون واحد للتشكيل) ، ومنها ماهو مزود بأكثر . وفي هذا الفصل سنعرض للزمرة التي هي من أهم البنى الجبرية ذات العملية الجبرية الواحدة ، بينما سنتطرق في الفصول اللاحقة إلى بنى جبرية ذات عمليتين جبريتين .

تعد نظرية الزمر من أهم مواضيع الجبر المجرد ، فهي تلعب دوراً رئيسياً في نظرية غالوا Galois (١٨١١ - ١٨٣٢) التي تعالج المسائل المتعلقة بالحلول الجبرية لكثيرات الحدود (*) . والدور الذي تلعبه نظرية

(*) يقال إن للمعادلة : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = o$ (حيث أمثال كثير الحدود في الطرف الأيسر أعداد حقيقية أو عقدية و n عدد صحيح موجب) مجموعة حلول جبرية إذا أمكن التعبير عن كل من حلولها بدلالة أمثالها باستخدام عدد منته من عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والجذر . ومن المعلوم أن لأي معادلة درجتها n لا تتجاوز 4 مجموعة حلول ←

الزمر في التوبولوجيا لا يقل أهمية وشمولاً عنه في علم الجبر ، ذلك أن نسبة لايستهان بها من البحوث التي تمت في السنوات الأخيرة في علم التوبولوجيا تعتمد بشكل مركز على نظرية الزمر ، حتى بات من الضروري لعلماء التوبولوجيا (الجبرية) الاحاطة بنظرية الزمر وسبر أغوارها على نحو لا يقل عمقاً عن علماء الجبر أنفسهم .

وبالنسبة لعلم الهندسة ، فحتى القرن التاسع عشر لم يكن الرياضيون على وفاق حول طبيعة علم الهندسة وحول المواد التي يجب تدريسها في هذا الحقل . ولم يغض هذا الخلاف إلا عام ١٨٧٢ بفضل العالم الألماني كلاين Klein الذي استخدم الزمر لتعريف علم الهندسة تعريفاً دقيقاً وشاملاً . فقد أعلن كلاين فيما يسمى منهاج إيرلانكر (Erlanger - Program) أن الهندسة هي العلم الذي يدرس تلك الخواص لمجموعات النقط والمستقيمات ، التي لا تتغير عند القيام « بزمرة » معينة من التحويلات (التطبيقات) . ففي الهندسة الاقليدية مثلاً ، فإن مايهمنا هو « زمرة الحركات الصلبة » .

ويجدر بنا أن نضيف إلى ما تقدم ، بأن مجال تطبيق نظرية الزمر

جبرية . بل توجد دساتير تعبر عن هذه الحلول بدلالة الأمثال الواردة فيها . أما في الحالة $n > 4$ ، فقد أثبت العالمان روفيني Ruffini (١٧٦٥ - ١٨٢٢) وآبل Abel (١٨٠٢ - ١٨٢٩) استحالة إيجاد دساتير حالة (شبيهة بالدساتير الحالة عندما $n \leqslant 4$) لجذور هذه المعادلات ، إلا أن غالوا اكتشف الشروط التي يجب أن تتحقق في معادلة درجتها لاتقل عن الخامسة كي تقبل هذه المعادلة مجموعة حلول جبرية .

تعدى حقل العلوم الرياضية البحتة إلى علم الفيزياء النظرية والكيمياء الكوانتية ، وحتى إلى علم البلورات ، الأمر الذي جعل هذه النظرية تشغل بالنسبة لاتساع مجال تطبيقاتها المركز الثاني بعد الجبر الخطي بين فروع علم الجبر .

هذا ونأمل من القارىء الافادة من هذه النظرية لسبب وجيه آخر : ذلك أن المبادىء (المسلمات) البسيطة نسبياً لبنية الزمرة توفر فرصة ممتازة لفهم أفضل وأعمق للطريقة الاستنتاجية التي تحتل مكان القلب من العلوم الرياضية المعاصرة . فعند دراستنا لمجموعة الأعداد الصحيحة في الفصل السابق ، نعتقد أنه من العسير على الطالب أن يحرر نفسه من كمية وافرة من الحقائق التي تجمعت لديه في سياق حياته المدرسية ، الأمر الذي يجعله يعتمد تلقائياً على هذه الحقائق مبتعداً عن البراهين المبنية مباشرة على المبادىء (axioms) والتعاريف . ولما لم تكن الزمرة مألوفة لدى الطالب ، فإن الدارس لها سيضطر غالباً إلى معالجة جديدة ودقيقة ، وما يشجعه على هذا بساطة وقلة المبادىء التي تستند عليها الزمرة .

ويجدر بنا أخيراً أن نشير إلى أن سرد نظرية الزمر بجميع تفاصيلها يتطلب كتاباً كاملاً من الحجم الكبير . وبالطبع ، فإن هذا الكتاب الذي يبحث في مبادىء الجبر المجرد لن يطمح إلى الالمام بجميع جوانب هذه النظرية وإنما سيكتفى بمس بعض النقاط الرئيسية فيها .

١ - ٣ تعريف : لتكن G مجموعة ، o عملية داخلية على G . نقول عن البنية (G , o) إنها زمرة إذا توفرت الشروط (المبادىء) التالية :

(١) أن تكون o تجميعية .

(٢) أن تحوي G عنصراً محايداً e لـ o .

(٣) أن يوجد لكل عنصر a من G نظير 'a بالنسبة لـ o (*).

ملاحظـــات :

٢ - ٣ إذا كانت (G , o) زمرة فإننا نقول « إن G زمرة بالنسبة لـ o » ، أو اختصاراً ، « إن G زمرة » إذا لم يكن ثمـــة مجال للالتبـــاس .

٣ - ٣ لا يمكن أن تكون دعامة الزمرة خالية لضرورة احتوائهـا على عنصر محايد .

٤ - ٣ قد يرمز أحياناً للعملية o بـ + ، عندها تسمى الزمرة جمعية ويرمز للعنصر المحايد e بـ 0 ويسمى صفراً ، كما يرمز للنظير 'a بـ (a-) ويسمى « ناقص a » أو المقـــلوب الجمعي . ويسمى النـاتج a + b « مجموع العنصرين a , b » ، ويكتب المجموع (a+(-b عندئذ على الشكل a - b ويسمى حاصل طرح b من a (أو فضل a عن b) .

كذلك يرمز أحياناً لـ o بإشـارة الضرب . ، عندها تسمى الزمرة ضربية ويرمز للعنصر المحايد e بـ 1 ويسمى واحداً ، كما يرمز للنظير 'a بـ a^{-1} ويسمى المقلوب الضربي لـ a ، أو اختصاراً ، مقلوب a . ويسمى

(*) إذا حذفنا الشرط (٣) فتسمى البنية (G , o) مونوئيداً [٠-٣-١] . ولو حذفنا الشرطـــين (٣) ، (٢) فنسمي (G , o) عندئـــذ كربوئيد Groupoïd . وإذا حذفنا الشروط (٣) ، (٢) ، (١) . فإن بعض المؤلفين يطلق على (G , o) اسم نصف الزمرة Semigroup .

الناتج a . b حاصل ضرب أو جداء a , b ، وغالبـــاً ما يكتب a . b بالشكل a b .

٥ - ٣ يسمى العدد الأساسي (الكاردينالي) | G | للمجموعة G مرتبة الزمرة (G , o) . وهكذا فإن مرتبة زمرة منتهية عدد عناصرها n تساوي n .

٦ - ٣ ليس [١ – ٣] هو التعريف الوحيد للزمرة ، فهنـــالك تعـاريف أخرى أشهرها تعريف الرومي كوروش Kurosh الذي نحصل عليه بأن نستعيض عن (٢) ، (٣) من [١ – ٣] بالشرطين التاليين :

(٢̄) أيا كان العنصران a , b من G فهنـــالك عنصر x من G بحيث : a o x = b .

(٣̄) أيا كان العنصر ان a , b من G فهنـــالك عنصر y من G بحيث : y o a = b .

(انظر التمرين المحلول رقم ٩١) .

أمثـــلة :

٧ - ٣ إن Z زمرة بالنسبة لعملية الجمع العـادية : ذلك أن مجموع عـددين صحيحين هو عدد صحيح (أي + عمليـة داخلية على Z) وأن عملية الجمع العادية هي تجميعية كما نعلم ، وأن هنالك عنصراً محايداً لـ + (هو العدد صفر) ، وأن لكل عنصر a مقلوباً جمعياً (وهو a –) .

كذلك فإن كلا من Q ، R ، C يشكل زمرة جمعيـة . أما N فليست كذلك (لماذا ؟) .

٨ - ٣ إن Q^* تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب العادية ، ذلك أن عملية الضرب مغلقة على Q^* ، وأن هذه العملية تجميعية ، وأن هنالك عنصراً محايداً هو 1 ، وأن لكل عنصر a من Q^* مقلوباً .

كذلك فإن كلا من R^* , C^* تشكل زمرة ضربية، أما Z^* فليست كذلك (لماذا ؟) .

٩ - ٣ إن $G = \{a, b, c\}$ لا تشكل زمرة بالنسبة للعملية □ الممثلة بالجدول الوارد أدناه ، رغم أن هذا الجدول يبين مباشرة أن □ عملية داخلية ، وأن a هو عنصر محايد لـ □ ، وأن لكل عنصر نظيراً على الأقل ($a' = a$, $b' = c$, $c' = b$) . والسبب في أن (G , □) ليست زمرة هو أن □ غير تجميعية . ففي الحقيقة ، لدينا (على الأقل) :

$$b \square (b \square c) = b \square a = b \quad ; \quad (b \square b) \square c = a \square c = c$$

وبالتالي فإن :

$$b \square (b \square c) \neq (b \square b) \square c$$

□	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	b

١٠ - ٣ لنرمز بـ R_1 , R_2 , R_3 للدورانات المطبقة على المثلث متساوي الأضلاع ABC حول مركزه O ، والتي تتم في مستوي المثلث باتجاه يماثل

اتجـــاه الانتقال من A الى C عن طريق B ، وبالزوايا $360°$, $240°$, $120°$ على الترتيب . انرمز كذلك بـ R_4 , R_5 , R_6 لدوران المثلث حول الارتفاعات AA' , BB' , CC' على الترتيب كل بزاوية قدرها $180°$ (R_4 , R_5 , R_6 هي إذن تناظرات بالنسبة لـ AA' , BB' , CC') . فإذا اصطلحنا على أن ناتج دوران R_i يعقبه دوران R_j هو $R_j \# R_i$ فإن مجموعة الدورانات $R_1 , \ldots , R_6$ تشكل زمرة بالنسبة لـ $\#$. وفي الحقيقة فإن $\#$ عملية داخلية جدولها :

$\#$	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
R_1	R_2	R_3	R_1	R_5	R_6	R_4
R_2	R_3	R_1	R_2	R_6	R_4	R_5
R_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
R_4	R_6	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1
R_5	R_4	R_6	R_5	R_1	R_3	R_2
R_6	R_5	R_4	R_6	R_2	R_1	R_3

ومن السهل التحقق من أن $\#$ تجميعية ، وأن لهذه العملية عنصراً محايداً هو R_3 ، وان لكل عنصر نظيراً بالنسبة لـ $\#$:

$$(R_1' = R_2 , R_2' = R_1 , R_3' = R_3 , R_4' = R_4 , R_5' = R_5 , R_6' = R_6)$$

١١ ـ ٣ الزمرة التناظرية لمجموعة : نسمي كل تقابل (أي تطبيق متباين وغامر) لمجموعة E على نفسها **تبديلاً** أو **تعويضاً** لـ E . سنبرهن الآن أن مجموعـــة تعويضات E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات $\circ$.

(١) إذا كان كل من f, g تبديلاً لـ E فإن $g \circ f$ تبديل لـ E .
في الحقيقة إن $g \circ f$ متباين لأن :

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \quad (\text{تعريفاً})$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \quad (\text{لأن } g \text{ متباين})$$

$$\Rightarrow x = y \quad (\text{لأن } f \text{ متباين})$$

كذلك فإن $g \circ f$ غامر ، ذلك أنه أيا كان x من E ، فهنالك عنصر z من E بحيث : $g(z) = x$ (لأن g غامر) . ولما كان f غامراً كذلك ، فهنالك عنصر y من E بحيث $f(y) = z$. وبالتالي فإن $g(f(y)) = x$ أو $(g \circ f)(y) = x$. وهذا يعني أنه أيا كان x من E فهنالك عنصر y من E يحقق العلاقة $(g \circ f)(y) = x$ ، وبالتالي فإن $g \circ f$ غامر .

وهكذا نرى أنه إذا كان كل من f, g تبديلاً لـ E فإن $g \circ f$ تبديل لـ E ، أي أن o هي عملية داخلية على مجموعة تباديل E .

(٢) إن العملية o تجميعية (انظر I) .

(٣) إن التطبيق المطابق id_E هو عنصر محايد لـ o ، ذلك أنه أيا كان التبديل f فإن :

$$\forall x \in E : \quad (f \circ id_E)(x) = f(id_E(x)) = f(x) \Rightarrow f \circ id_E = f$$

$$\forall x \in E : \quad (id_E \circ f)(x) = id_E(f(x)) = f(x) \Rightarrow id_E \circ f = f$$

(٤) لكل تعويض f لـ E نظير f^{-1} بالنسبة لـ o . في الحقيقة ، إذا كان x عنصراً اختيارياً من E ، فهنالك عنصر y من E يحقق :

$f(y)=x$ (لأن f غامر) . ولما كان f متبايناً فإن y وحيد . لذا فمن الطبيعي أن نعرف تابعاً متبايناً وغامراً f^{-1} لـ E على E بالدستور $f^{-1}(x)=y$. ويسمى f^{-1} عادة التابع العكسي لـ f . ومن الواضح أن :

$$\forall x \in E \quad : \quad (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(y) = x = id_E\, x$$

$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = id_E$$

ويبرهن بصورة مماثلة أن : $f^{-1} \circ f = id_E$

وهكذا فإننا نرى أن جموعة تباديل E تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات o ، وتسمى هذه الزمرة زمرة تباديل (أو تعويضات) E ، كما تسمى الزمرة التناظرية لـ E ، ويرمز لها بـ S_E .

١٢ - ٣ الزمرة التناظرية من الدرجة n : إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها n (Card E = n) ، فإن S_E تدعى عندئذ الزمرة التناظرية من الدرجة n ويرمز لها بـ S_n . ومن الواضح أن مرتبة S_n هي n! . ولو رمزنا عندئذ بـ { 1 , 2 , . . . , n } إلى المجموعة E ، فإننا نرمز عادة إلى كل عنصر من S_n بسطرين محصورين بين قوسين ، بحيث يقابل كل عدد من السطر العلوي العدد الواقع دونه من السطر السفلي . وعلى سبيل المثال فإن :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

هو تعويض f من S_4 حيث :

$$f(1)=1 \;,\; f(2)=3 \;,\; f(3)=4 \;,\; f(4)=2$$

هذا ويمكن كتابة التبديل نفسه بأشكال مختلفة تبعاً لترتيب الأعداد في السطر العلوي . وعلى سبيل المثال فإن الرموز :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

تشير إلى التعويض نفسه ، حيث : $1 \rightarrow 2 \;,\; 2 \rightarrow 3 \;,\; 3 \rightarrow 1$

ويشار غالباً إلى الناتج $p \circ q$ بـ pq ويدعى « حاصل ضرب » التعويض q بالتعويض p . وهكذا فإذا كان

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} , \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

عنصرين من S_5 فإن :

$$p\,q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

الخواص الابتدائية للزمر :

١٣ - ٣ نظرية . العنصر المحايد في الزمرة وحيد [٢٧ - ١] ، ولكل عنصر a من الزمرة نظير وحيد a' [٢٨ - ١] .

١٤ - ٣ نظرية . كل عناصر الزمرة (G , o) منتظمة ، أي أن :

$$\forall a , b , c \in G : \begin{cases} a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c \\ b \circ a = c \circ a \Rightarrow b = c \end{cases}$$

البرهان : بما ان لكل عنصر من الزمرة نظيراً ، فان صحة هذه

النظرية ناتج من النظرية [٣٤ - ١] . لاحظ أنه في الحالة العامة :

$b \circ a = a \circ c$ لاتقتضي $b = c$

وعلى سبيل المثال فإذا اخترنا العناصر :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

من S_7 [١٢ - ٣] فإن :

$$b\,a = a\,c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

رغم أن $b \neq c$ كما هو واضح .

١٥ - ٣ نتيجة : إن كان a , b عنصرين من زمرة وكان $a \circ b = a$ أو $b \circ a = a$ فإن $b = e$ ، لأن المساواة الأولى هي $a \circ b = a \circ e$ ، والمساواة الثانية هي : $b \circ a = e \circ a$.

١٦ - ٣ نظرية . إن نظير نظير أي عنصر a من زمرة هو العنصر a نفسه ، أي : $(a')' = a$

البرهان : لما كان a' نظيراً لـ a ، فان a نظير لـ a' [٢٢ - ١]. وبما أن $(a')'$ نظير لـ a' أيضاً ، فإنه يترتب على كون النظير واحداً بالنسبة للعملية التجميعية [٢٨ - ١] أن $(a')' = a$.

١٧ - ٣ نظرية . إذا كانت (G , o) زمرة فان :

$$\forall a , b \in G \quad : \quad (a \circ b)' = b' \circ a'$$

البرهان : إن صحة هذه الدعوى ناتجة من النظرية [٣٢ - ١] بعد ملاحظة أن الزمرة هي مونوئيد لكل عنصر منه نظير فيه .

ويمكننا بالافادة من هذه المساواة ، ومن طريقة التراجع إثبات التالي :

$$\forall a , b , \ldots , p , q \in G \quad : \quad (a \circ b \circ \ldots \circ p \circ q)' =$$
$$= q' \circ p' \circ \ldots \circ a' \circ b'$$

١٨ - ٣ نظرية . لتكن (G , o) زمرة . فأيا كان العنصران a , b من G ، فإن لكل من المعادلتين :

$$a \circ x = b \quad , \quad y \circ a = b$$

حلًا وحيداً في G .

البرهان : إن صحة هذه الدعوى ناتجة من النظرية [٣٥ - ١] بعد ملاحظة أن الزمرة هي مونوئيد لكل عنصر منه نظير فيه .

هذا ونجد حل المعادلة الأولى على النحو التالي :

$$a \circ x = b \Rightarrow a' \circ (a \circ x) = a' \circ b \Rightarrow (a' \circ a) \circ x = a' \circ b \Rightarrow$$
$$e \circ x = a' \circ b \Rightarrow x = a' \circ b$$

ونجد بصورة مماثلة أن حل المعادلة $y \circ a = b$ هو $y = b \circ a'$.

١٩ - ٣ تعريف : لتكن (G , o) زمرة . فإذا كان a عنصراً من G ، m عدداً صحيحاً موجباً فإننا نعرف :

$$a^m = a \circ a \circ \ldots \circ a \qquad (m \text{ عدد الحدود })$$

وإذا رمزنا بـ e للعنصر المحايد في G ، فاننا نعرف :

$$a^0 = e$$

وإذا رمزنا بـ a^{-1} لنظير a بالنسبة لـ o ، فاننا نصطلح على أن :

$$a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1} o\, a^{-1} o \ldots o\, a^{-1} \quad \text{(عدد الحدود m)}$$

هذا وفي الحالة الخاصة عندما تكون الزمرة جمعية ، فاننا نعرف (بفرض m عدداً صحيحاً موجباً)

$$m\,a = a + a + \ldots + a \quad \text{، (عدد الحدود m)}$$

$$(-m)\,a = m\,(-a) = (-a) + (-a) + \ldots + (-a)$$

(عدد الحدود m)

وإذا رمزنا بـ O للعنصر المحايد في الزمرة الجمعية [٤ - ٣] فاننا نصطلح على أن :

$$0\,a = O$$

ويجب التنبيه في هذا الصدد إلى أن m a (m عدد صحيح موجب أو سالب أو صفر) هو مجرد رمز نعتمده بغية الاختصار في الكتابة ، ولا يجوز البتة الظن بأنه حاصل ضرب عدد صحيح m بالعنصر a من G ، فليس من مبرر لمثل هذا الظن ، ذلك أننا بصدد عملية جمع عناصر من G ، ولا مجال للكلام عن عملية ضرب الأعداد الصحيحة وعناصر G .

هذا ونترك للقارىء إثبات صحة النظرية الواضحة التالية .

٢٠ - ٣ نظرية : لتكن (G , o) زمرة عنصرها المحايد e ،

وليكن a عنصراً من G . عندئذ يكون :

$$e^n = e \quad (١)$$

$$a^m \circ a^n = a^{m+n} \quad (٢)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (٣)$$

وذلك أيا كان العددان الصحيحان m , n .

٢١ - ٣ الزمرة التبديلية (الآبلية) : إذا كانت العملية o في الزمرة (G , o) تبديلية ، أسمينا الزمرة تبديلية أو آبلية [١٢ - ١] . وبالاضافة إلى الخواص الابتدائية للزمر التي أوردناها فيما تقدم ، فان الزمرة التبديلية (G , o) تمتاز بالخاصة البينة التالية :

أيا كانت العناصر a , b , ... , p من G ، فإن الناتج aobo ... op لا يتغير عند العبث بترتيب العناصر ، أو عند الاستعاضة عن بعض هذه العناصر بناتجها . ويترتب على هـــذا مثلاً أنه يمكن إيراد نظير الناتج aobo , ... , op بنفس الترتيب ، أي :

$$(a \circ b \circ \ldots \circ p)' = a' \circ b' \circ \ldots \circ p'$$

وأنه لا فرق بين حلي المعادلتين $a \circ x = b$, $x \circ a = b$ ، ذلك أن حل كل منهما هو $x = a' \circ b = b \circ a'$.

وعلى سبيل المثال فإن أي زمرة تناظرية S_n (درجتها لاتقل عن 3) هي زمرة غير آبلية . فاذا كانت n = 5 مثلاً ، واخترنا من S_5 العنصرين :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن :

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

كذلك فان زمرة دورانات المثلث [١٠ - ٣] غير آبلية .

الزمرة الجزئية

٢٢ - ٣ تعريف : لتكن (G , o) زمرة ، H مجموعة جزئية من G . نقول عن H إنها زمرة جزئية من الزمرة G إذا كانت H نفسها زمرة بالنسبة (*) لـ o .

ملاحظات :

٢٣ - ٣ لما كانت الزمرة الجزئية هي زمرة ، فلا يمكن أن تكون خالية لاحتوائها على عنصر محايد

٢٤ - ٣ في كل زمرة G زمرتان جزئيتان على الأقل هما الزمرة G نفسها ، والزمرة الجزئية {e} الحاوية على العنصر المحايد e لـ o .

٢٥ - ٣ إذا كانت H زمرة جزئيـــة من G ، وكانت K زمرة جزئية من H ، فان K زمرة جزئية من G .

٢٦ - ٣ لكل الزمر الجزئية من الزمرة (G , o) عنصر محايد واحد

(*) أو بصورة أدق ، بالنسبة لمقصور العملية الداخلية (أي التابع) o على H .

هو العنصر المحايد e في G . وفي الحقيقة ، إذا كان u هو العنصر المحايد للزمرة الجزئية H مثلاً ، فيجب أن يتحقق في G المساواتان :

$$e \circ u = u \circ e = u$$

كما يجب أن يتحقق في H المساواة :

$$u \circ u = u$$

وبالتالي فيجب أن يتحقق في G المساواة $u \circ u = e \circ u$ التي تقتضي $u = e$ لأن جميع عناصر الزمرة منتظمة [١٤ - ٣] .

أمثـــلة :

٢٧ - ٣ إن مجموعة الأعداد الصحيحة Z هي زمرة جزئية من الزمرة (R , +) أي زمرة الأعداد الحقيقية R بالنسبة لعملية الجمع العادية + . كذلك فان مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية تشكل زمرة جزئية من الزمرة (Z , +) . وبالتالي فان مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية تشكل زمرة جزئية من الزمرة (R , +) [٢٥ - ٣] ، الأمر الذي يمكن التأكد منه مباشرة دون استخدام الزمرة الوسيطة (Z , +) .

هذا ولا تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية زمرة جزئية من (Z , +) (ولا من الزمرة (R , +)) .

٢٨ - ٣ إن كلا من $\{ R_1 , R_2 , R_3 \}$, $\{ R_3 , R_4 \}$ يشكل زمرة جزئية من زمرة دورانات المثلث الواردة في [١٠ - ٣] .

٢٩ - ٣ نظرية : لتكن (G , o) زمرة و H مجموعة جزئية من

G . إن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من الزمرة G هو أن تتحقق الشروط التالية :

(١) أن تكون H مجموعة غير خالية .

(٢) أن تكون H مغلقة (أي مستقرة) بالنسبة لـ o .

(٣) أن تحوي H نظير أي من عناصر H بالنسبة لـ o .

البرهان : لزوم الشروط واضح ، ذلك أنه إذا كانت H زمرة جزئية من G ، فهي زمرة بالنسبة لـ o ، وبالتالي فهي غير خالية [٢٣ – ٣] وهي مغلقة بالنسبة لـ o ، وتحوي نظير أي عنصر منتم اليها .

وبالعكس سنفترض الآن أن H مجموعة جزئية من G تحقق الشروط (١) - (٣) ، ولنبرهن أن H زمرة .

ويكفي لهذا الغرض ، إذا أدخلنا في اعتبارنا الشرطين (٢) ، (٣) وأن العملية o تجميعية على H لأنها تجميعية على G ، يكفي إثبات وجود عنصر محايد في H بالنسبة لـ o .

في الحقيقة ، لما كانت H غير خالية استناداً إلى (١) ، فانها تحتوي على عنصر a على الأقل . وبالتالي فان $a' \in H$ استناداً إلى (٣) . ولما كانت H مغلقة بالنسبة لـ o استناداً إلى (٢) ، فان $aoa' = e$ ينتمي إلى إلى H . وبما أن e هو العنصر المحايد في G فهو العنصر المحايد في H [٢٦ - ٣] .

٣٠ – ٣ ملاحظة . في الحالة الخاصة التي تكون فيها المجموعة الجزئية

H في النظرية السابقة منتهية ، يمكن حذف الشرط الأخير (٣) (راجع التمرين المحلول ٩٧) .

٣١ - ٣ **مثال** : ليكن k عدداً صحيحاً مثبتاً . إن مجموعة الأعداد الصحيحة $K = \{ km \mid m \in Z \}$ تشكل زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع العادية ، ذلك أن $K \neq \Phi$ وضوحاً ، كما أن حاصل جمع أي عنصرين km_1 و km_2 من K هو العنصر $k(m_1 + m_2)$ الذي ينتمي إلى K (أي أن K مغلقة بالنسبة للعملية +) . وأخيراً فان نظير أي عنصر km من Z هو العنصر $-km$ الذي ينتمي إلى K (لأنه يساوي حاصل ضرب العدد k بالعدد الصحيح $(-m)$) .

٣٢ - ٣ **مثال** : لتكن $G = \{ e , a , b , c , d , f \}$ زمرة بالنسبة للعملية الداخلية (∘) الممثلة بالجدول :

∘	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

إن استخدام [٣٠ - ٣] يبين مباشرة بأن $\{e , a , b\}$ و $\{ e , f \}$ زمرتان جزئيتان من الزمرة G .

٣٣ - ٣ نظرية : لتكن (G , o) زمرة ، H مجموعة جزئية من G . إن الشرط اللازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية من الزمرة G هو أن يتوفر الشرطان التاليان :

(١)َ أن تكون H مجموعة غير خالية .

(٢)َ أيا كان العنصران a , b (المختلفان أو المتساويان) من H ، فان العنصر a o b′ ينتمي كذلك إلى H .

البرهان : إن الشرطين لازمان ، ذلك أنه إذا كانت H زمرة جزئية من G فهي غير خالية [٢٣ - ٣] . ولما كانت H زمرة بالنسبة لـ o [٢٢ - ٣] فانه أيا كان a , b من H ، فان b′ عنصر من H . ولما كانت H مغلقة بالنسبة لـ o ، فان a o b′ عنصر من H كذلك .

لننتقل إلى البرهان على كفاية الشرطين ، أي لنثبت أنه إذا كانت H مجموعة جزئيـة من G تحقق الشرطين (١)َ ، (٢)َ ، فان H زمرة. في الحقيقة ، لما كانت H غير خالية (الشرط (١)َ) فانها تحتوي على عنصر a (على الأقل) . عندئذ نجد استناداً إلى الشرط (٢)َ أن a o a′ = e ينتمي إلى H . وبما أن e عنصر محايد في G فهو عنصر محـايد في H كذلك [٢٦ - ٣] . وبتطبيق الشرط (٢)َ ثانيـــة ، ولكن الآن على a , e نجد :

$$a \in H \Rightarrow e \circ a' \in H \Rightarrow a' \in H \qquad (*)$$

أي أن لكل عنصر a من H نظيراً a′ منتمياً إلى H كذلك .

سنثبت الآن أنه أيا كان العنصران a , b من H فان a o b عنصر

من H . في الحقيقــــة ، نرى استناداً إلى (*) أن b' عنصر من H .
وبالتالي ، واستناداً إلى (٢)َ يكون $a \circ (b')' = a \circ b$ عنصراً من H .

وهكذا نكون قد توصلنا إلى أن الشرطين (١)َ ، (٢)َ يقتضيـان الشروط (١) ، (٢) ، (٣) من [٢٩ - ٣] ، وبالتالي فان H زمرة جزئية من الزمرة G .

٣٤ - ٣ **مثال** : لتكن (G , ⊤) زمرة ، ولنقابل كل عنصر a من G بتطبيق f_a لـ G في G معرف بالقاعدة :

$$\forall x \in G \quad : \quad f_a(x) = a \top x$$

وسنبرهن الآن أن مجموعة التطبيقات :

$$F = \{ f_a \mid f_a(x) = a \top x \quad : \quad a , x \in G \}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_G .

(أ) إن التطبيق $f_a : G \to G$ غامر ، ذلك أنه أيا كان b من G ، فهنالك عنصر x من G يحقق $f_a(x) = b$ [١٨ - ٣] . ولما كان هـذا العنصر وحيداً [١٨ - ٣] فإن f_a متبـاين كذلك . لذا فان f_a (أيا كان a) هو تبديل لـ G ، وبالتالي فان F هي مجموعة جزئية من مجموعة تباديل G (التي تشكل دعامة S_G) .

(ب) إن $F \neq \Phi$ ، ذلك أن G تحتوي (على الأقل) على العنصر الحايد e . وبالتالي فان F تحتوي على f_e .

(حـ) ليكن f_a , f_b أي عنصرين من F . من السهل التـأكد من أن نظير f_b بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات o هو $f_{b'}$ (تأكد من

ذلك بعد أن تثبت أن f_e هو العنصر الحايد في F بالنسبة لـ o) . ولما كانت العلاقة التالية .

$$(f_a \circ f_{b'})(x) = f_a(f_{b'}(x)) = f_a(b' \top x) = a \top (b' \top x) =$$

$$(a \top b') \top x = f_{a \top b'}(x)$$

صحيحة أيا كان x من G ، فاننـا نستنتج أنه أيا كان من f_a , f_b F ، فان $f_a \circ f_{b'}$ (الذي هو ناتج تركيب أي عنصر f_a مع $f_{b'}$ نظير العنصر الآخر) هو العنصر $f_{a \top b'}$ الذي ينتمي إلى F (لأن $a \top b'$ ينتمي إلى G) .

وهكذا نرى أن شرطي النظرية [٣ - ٣٣] محققـان بالنسبة لـ F التي هي مجموعة جزئية من S_G (استناداً إلى « أ ») . لذا فان F هو زمرة جزئية من S_G .

٣ - ٣٥ نظرية . لتكن (G , o) زمرة ، a عنصراً من G . عندئذ تكون المجموعة الجزئية من G :

$$[a] = \{ a^k : k = o, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

زمرة جزئية من الزمرة G .

البرهان : نلاحظ قبل كل شيء أن [a] ليست خاليـة ، ذلك أن $a^1 = a$ عنصر من [a] . لنفترض الآن a^m , a^n أي عنصرين من [a] عندئذ : $a^m \circ (a^n)^{-1} = a^m \circ a^{-n} = a^{m-n}$. ولما كانت [a] تحتوي على كل القوى الصحيحة لـ a ، فان a^{m-n} عنصر من [a] .

وهكذا نكون قد أثبتنا أن ناتج أي عنصر a^m مع نظير أي عنصر

a^n من المجموعـــة الجزئية غير الخالية [a] هو عنصر من [a] أيضاً .
وبالتالي فان [a] زمرة جزئية من (G , o) ، وذلك استناداً إلى [٣٣ - ٣] .

الزمرة الدوارة

٣٦ - ٣ تعريف . تسمى [a] الواردة في [٣٥ - ٣] زمرة دوارة مولّدة بـ a . وإذا كانت G = [a] من أجل عنصر a من G ، قلنا إن G زمرة دوارة (مولدها a) ومن الواضح أن كل زمرة دوارة تجلية .

وقد تكون الزمرة الدوارة منتهية أو غير منتهية . وعلى سبيل المثال ، فان (Z , +) الواردة في [٧ - ٣] هي زمرة دوارة غير منتهيـــة مولدها 1 ، ذلك أنه أيا كان العدد الصحيح m (الموجب أو السالب أو الصفر) ، فانه يساوي 1^m . فمثلاً إذا كان m = - 3 ، فاننا نجد [١٩ - ٣] : $(1)^{-3} = (1^{-1})^3$ ، حيث 1^{-1} هو كما اصطلحنا عندئذ نظير 1 بالنسبة للعملية + ، أي أن $1^{-1} = -1$. لذا فان $(1)^{-3} = (-1)^3$.
ولما كانت العملية على Z هي عملية الجمع العادية ، فان :

$$(-1)^3 = (-1) + (-1) + (-1) = -3$$

هذا ويطلب من القارىء التحقق من أن العدد (1 -) يصلح مولداً آخر لهذه الزمرة .

وعلى الرغم من ورود عدد غير منته من القوى الصحيحة لـ a في زمرة دوارة [a] ، فقد يكون عدد العناصر المختلفة في [a] منتهياً ، وعندها

تكون الزمرة الدوارة منتهية . وعلى سبيل المثال فان $\{1, -1, i, -i\}$ (بفرض $i^2 = -1$) هي زمرة دوارة منتهية بالنسبة لعملية الضرب ، مولدها i أو $-i$. فإذا أخذنا المولد i مثلاً نجد : $i^1 = i , i^2 = -1 , i^3 = -i , i^4 = 1$ وأية قوة صحيحة أخرى لـ i هي حتماً أحد هـــذه العناصر الأربعة . وسنبرهن في التمرين المحلول (٩٥) ما يلي :

٣٧ - ٣ نظرية . إذا كانت G زمرة دوارة منتهية مرتبتهـــا n ومولدها a ، فان $a^n = e$ (e العنصر الحايد في G) ، كما أن العناصر المختلفة في G هي عناصر المجموعة $\{a, a^2, \ldots, a^{n-1}, a^n = e\}$.

٣٨ - ٣ نظرية . إن تقاطع أي جماعة S من الزمر الجزئية من الزمرة (G, o) هو أيضاً زمرة جزئية من (G, o) .

البرهان : نلاحظ أولاً أن تقاطع الجماعة S غير خال ، ذلك أن كلا من عناصر S يحتوي على العنصر الحـــايد e في G [٣-٢٦] . وهكذا ، ليكن a , b عنصرين متساويين أو لا من التقاطع (غـــير الخالي) للجماعة S . عندئذ يكون a , b عنصرين من كل من الزمر الجزئية من G التي تشكل S . واستناداً إلى [٣-٣٣] يكون $a \, o \, b'$ عنصراً منتمياً إلى كل زمرة جزئية ، وبالتالي إلى تقاطع هـذه الزمر الجزئية ، وهكذا نرى أن شرطي النظرية [٣-٣٣] محققان ، وهـذا يعني أن التقاطع هو زمرة جزئية من G .

الزمر الجزئية الناظمية (السوية) :

من بين الزمر الجزئية الشهيرة ، تلك التي ميزها غالوا في أبحاثه والتي

تسمى بالزمر الجزئية الناظمية (أو اللامتغيرة أو المتميزة) .

٣٩ - ٣ تعريف . نقول عن زمرة جزئية H من الزمرة (G, o) إنها زمرة جزئية ناظمية من G إذا تحقق الشرط :

$$\forall g \in G , \forall h \in H \ : \ g o h o g' \in H$$

وإذا عرفنا المجموعة $g o H o g'$ على أنها :

$$g o H o g' = \{ g o h o g' : h \in H \}$$

فانه يترتب على التعريف أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية ناظمية هو أن يكون :

$$\forall g \in G \ : \ g o H o g' \subseteq H \qquad (*)$$

٤٠ - ٣ نظرية . الشرط اللازم والكافي كي تكون الزمرة الجزئية H من G زمرة جزئية ناظمية من G هو :

$$\forall g \in G \ : \ g o H o g' = H \qquad (**)$$

البرهان : إن تحقق الشرط (**) يقتضي بوضوح الشرط (*) ، أي أن تحقق الشرط (**) كاف حتى تكون H زمرة جزئية ناظمية من G .

وبالعكس ، لنفرض الآن أن H زمرة جزئية ناظمية من G (أي أن الشرط (*) محقق) ، ولنبرهن على تحقق الشرط (**) . في الحقيقة إذا كان g عنصراً اختيارياً من G ، فان g' يكون عنصراً من G . عندها يقتضي الشرط (*) أن يكون $g' o H o (g')' \subseteq H$ أي أن يكون

$H \subseteq g' o H o g$. وينتج عن هذا أنه أيا كان g من G :

$$g o (g' o H o g) o g' \subseteq g o H o g' \Rightarrow (g o g') o H o (g o g')$$

$$\subseteq g o H o g' \Rightarrow e o H o e = H \subseteq g o H o g' \qquad (***)$$

إن (*) و (***) يبينان أن $\forall g \in G : g o H o g' = H$

وهو المطلوب .

الهومومورفيزم والايزومورفيزم :

عرفنا في الفصل الأول صنفاً خاصاً من التطبيقات من بنية جبرية إلى أخرى أسميناها في حينه الهومومورفيزم ودرسنا بعض خواصها . وتلعب هذه التطبيقات في نظرية الزمر دوراً غاية في الأهمية ، ذلك أنها تعتبر وسيلة لدراسة الخواص الرئيسية للزمرة ، كما أنها تصلح أداة لبرهان بعض النظريات المتعلقة بالزمر .

***٤١ - ٣ نظرية** . لتكن (G , o) زمرة ، (E , *) مجرد مجموعة عليها عملية داخلية ، وليكن f هومومورفيزماً لـ (G , o) في (E , *). عندئـــذ :

(١) يكون الخيال الهومومورفي $\bar{G} = f(G)$ زمرة بالنسبة لـ * .

(٢) إذا كانت H زمرة جزئيـة ناظمية من G ، فان خيالهـــا $\bar{H} = f(H)$ هو زمرة جزئية ناظمية من الزمرة $\bar{G}$.

البرهان : (١) إن النظرية [٥٠ - ١] تبين بأن $\bar{G}$ مجموعة جزئية مغلقـــة بالنسبة لـ * ، وأن * عملية تجميعية على $\bar{G}$ (لأن العملية o

تجميعية على G) ، وأن العنصر $u = f(e)$ هو عنصر محايد في $\overline{G}$ بالنسبة لـ * (لأن e عنصر محايد لـ o في G) ، وأن لكل عنصر $f(a)$ من $\overline{G}$ نظيراً $f(a')$ بالنسبة لـ * (لأن لكل عنصر a من G نظيراً a' بالنسبة لـ o) . لذا فان $\overline{G}$ زمرة بالنسبة لـ * .

(٢) لنفترض $\overline{h}$ عنصراً كيفياً من $\overline{H}$ و $\overline{g}$ عنصراً كيفياً من $\overline{G}$. عندئذ يوجد عنصران (على الأقل) h من H و g من G بحيث :

$f(h) = \overline{h}$, $f(g) = \overline{g}$. ولما كان :

(لأن f هومومورفيزم) $f(g \circ h \circ g') = f(g) * f(h) * f(g')$

(الشق (٥) من [١ - ٥٠]) $= f(g) * f(h) * [f(g)]'$

$= \overline{g} \circ \overline{h} \circ \overline{g}'$

وكان $g \circ h \circ g'$ عنصراً من H ، فإن $\overline{g} \circ \overline{h} \circ \overline{g}'$ عنصر من $\overline{H}$. لكن $\overline{h}$ أي عنصر من $\overline{H}$ ، $\overline{g}$ أي عنصر من $\overline{G}$ ، إذن $\overline{H}$ مجموعة جزئية ناظمية من $\overline{G}$.

٤٢ - ٣ نظرية . إذا كان f هومومورفيزماً للزمرة (G, o) ذات العنصر الحايد e في الزمرة $(S, *)$ ذات العنصر الحايد u فان :

(١) $u = f(e)$ و $f(a') = [f(a)]'$ أيا كان a من G .

(٢) الخيال الهومومورفي $\overline{G} = f(G)$ (الذي يرمز له أحياناً بـ Im f) هو زمرة جزئية من الزمرة S .

(٣) المجموعة $H = f^{-1}(u)$ (التي تتشكل من جميع عناصر G التي

خيال كل منها u) هي زمرة جزئية ناظمية من G . وتسمى $f^{-1}(u)$ نواة الهومومورفيزم f ، ويرمز لها بـ Ker f .

البرهان : لقد تم إثبات (١) سابقاً [٥٠ - ١] . أما (٢) فهو ناتج عن النظرية [٤١ - ٣] ذلك أننا أثبتنا في حينه أن G زمرة بالنسبة لـ * ؛ ولما كانت $\overline{G}$ مجموعة جزئية من S ، فان تعريف الزمرة الجزئية يقتضي بأن تكون $\overline{G}$ زمرة جزئية من الزمرة S .

(٣) من الواضح أنه أيا كان العنصران a , b من H فإن :

$$f(a \circ b') = f(a) * f(b') = f(a) * [f(b)]' = u * u' = u$$

وتعني هذه المساواة أن $a \circ b'$ عنصر من H . وإذا أضفنا إلى ذلك أن $H \neq \Phi$ (لأن $e \in H$ استناداً إلى (١)) لاستنتجنا اعتماداً على [٣٣ - ٣] أن H زمرة جزئية من G .

هـذا ، ومن جهة أخرى ، فأياً كان العنصر h من H والعنصر g من G فإن :

$$f(g \circ h \circ g') = f(g) * f(h) * f(g') = f(g) * u * [f(g)]'$$
$$= f(g) * [f(g)]' = u$$

وهـذا يعني أنه عندئذ يكون $g \circ h \circ g'$ عنصراً من H ، أي أن الزمرة الجزئية H من G هي زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G .

٤٣ - ٣ نظرية كايلي : Cayley . كل زمرة (G , T) هي ايزومورفية لزمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_G .

البرهان : لقد وجدنا في [٣٤ - ٣] أن المجموعة :

$$F = \{ f_a \mid f_a(x) = a \top x \quad : \quad a, x \in G \}$$

تشكل زمرة جزئية من الزمرة التناظرية S_G .

وسنبرهن الآن أن التطبيق $K : G \to F$ المعروف بالقاعدة $K(a) = f_a$ هو إيزومورفيزم للزمرة $(G, \top)$ على الزمرة الجزئية (F, o) من S_G (o هي هنا عملية تركيب التطبيقات) .

(١) سنبين أولاً أن التطبيق K ،الذي هو غامر كما هو واضح ، متباين . في الحقيقة :

$$K(a) = K(b) \Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow \forall x \in G : f_a(x) = f_b(x)$$
$$\Rightarrow a \top x = b \top x$$

ولما كانت المساواة $a \top x = b \top x$ تقتضي $a = b$ [١٤ - ٣] فاننا نستنتج أن K متباين حقاً .

(٢) بعد أن بينا في (١) أن K تقابل ، بقي علينا إثبات أن K هومومورفيزم . في الحقيقة أيا كان العنصران a, b من G فان :

$$f_{a \top b}(x) = (a \top b) \top x = a \top (b \top x) = f_a(b \top x) =$$
$$f_a(f_b(x)) = (f_a \, o \, f_b)(x)$$

ولما كان هذا صحيحاً أيا كان x من G فان $f_{a \top b} = f_a \, o \, f_b$. وبما أن :

$$K(a) = f_a \quad , \quad K(b) = f_b \quad , \quad K(a \top b) = f_{a \top b}$$

فان :

$$K(a \top b) = K(a) \, o \, K(b)$$

أي أن K هومومورفيزم . وإذا أضفنا إلى ذلك ما وجدناه في (١) من أن K تقابل فان **K** هو إيزومورفيزم لـ (G , T) على الزمرة الجزئية (F , o) من الزمرة التناظرية S_G .

٤٤ ـ ٣ **ملاحظة** : بما أننا لم نمل أي شرط على العدد الكاردينالي (الأسامي) لـ **G** ، فاننا نستنتج أنه إذا كانت الزمرة G منتهيــة ومرتبتها n ، فانها إيزومورفية لزمرة جزئية من الزمرة التنـاظرية S_n من الدرجة n .

تمارين محلولة

٨٤ - لتكن E مجموعة مزودة بالعملية الداخلية o . نسمي العنصر a من E متساوي القوى (أو مراوحاً) Idempotent إذا كان $a\,o\,a = a$.
برهن أن أي زمرة (G , o) تحتوي على عنصر مراوح واحد فقط هو العنصر المحايد e لـ o .

الحل : لما كان $e\,o\,e = e$ ، فان e عنصر مراوح . ولو افترضنا وجود عنصر مراوح آخر u $(u \neq e)$ في هذه الزمرة ، لكان $u\,o\,u = u$. ولكن هذه المساواة تقتضي $u = e$ [١٥ - ٣] ، وهذا خلاف الفرض . لذا فان أي عنصر مراوح للزمرة G هو عنصر محايد في G . ولما كان في أي زمرة عنصر محايد واحد فقط [١٣ - ٣] فان أي زمرة تحتوي على عنصر مراوح وحيد هو العنصر المحايد e فيها .

٨٥ - لتكن $(G , \top)$ زمرة . برهن أنه إذا حقق عنصران a , x من G العلاقة $a \top x = x$ ، كان a العنصر المحايد e لـ $\top$.

الحل : لمـــا كان $x = e \top x$ (استناداً إلى تعريف e) ، فان العلاقة المفروضة تكافىء العلاقة $a \top x = e \top x$. التي تقتضي استناداً إلى [١٤ - ٣] $a = e$ وهو المطلوب .

٨٦ - لنرمز بـ $P(X)$ لمجموعة أجزاء المجموعة غير الخالية X . برهن أن كلا من البنيتين $(P(X) , \cup)$, $(P(X) , \cap)$ هي مونوئيد وليست زمرة .

الحل : إن $(P(X), \cup)$ مونوئيد ، ذلك أن : (١) عملية الاجتماع هي عملية داخلية على $P(X)$ ، فاجتماع أي عنصرين من $P(X)$ (أي اجتماع أي مجموعتين جزئيتين من X) هو عنصر من $P(X)$. (٢) العملية $\cup$ تجميعية كما نعلم . (٣) يوجد عنصر محايد بالنسبة لـ $\cup$ هو المجموعة الخالية Φ (وذلك لأن المجموعة الخالية Φ هي مجموعة جزئية من أية مجموعة X) .

لكن $(P(X), \cup)$ ليست زمرة ، ذلك أنه لو افترضنا العكس ، لكان لكل عنصر من $P(X)$ نظير بالنسبة لـ $\cup$. وهذا يقتضي وجود نظير لـ X (X عنصر من $P(X)$) بالنسبة لـ $\cup$ ، أي وجود عنصر Y من $P(X)$ بحيث : $X \cup Y = \Phi$. لكن هـذا مستحيل ، لأنه أيا كانت Y من $P(X)$ فان $X \cup Y \supseteq X$ و $X \neq \Phi$ فرضاً .

ملاحظة (١) : لو كانت $X = \Phi$ ، فان المونوئيد $(P(X), \cup)$ يغدو زمرة . (لماذا ؟) .

ملاحظة (٢) : إن دراسة المســألة من أجل $(P(X), \cap)$ تتم على نحو مماثل .

٨٧ - لتكن (G, o) زمرة عنصرها المحايد e . برهن أنه إذا تحقق أحد الشروط التالية :

$$\forall a, b \in G \quad : \quad (a\, o\, b)^2 = a^2\, o\, b^2 \qquad (١)$$

$$\forall a \in G \quad : \quad a^2 = e \qquad (٢)$$

$$\forall a \in G \quad : \quad a' = a \qquad (٣)$$

فان الزمرة (G, o) تكون آبلية .

الحل : لنفرض تحقق المساواة الأولى . عندها نجد :

$$(a\,o\,b)^2 = a^2\,o\,b^2 \Rightarrow (a\,o\,b)\,o\,(a\,o\,b) = (a\,o\,a)\,o\,(b\,o\,b)$$

$$\Rightarrow a\,o\,(b\,o\,(a\,o\,b)) = a\,o\,(a\,o\,(b\,o\,b))$$ (o تجميعية)

$$\Rightarrow b\,o\,(a\,o\,b) = a\,o\,(b\,o\,b)$$ (نظرية [١٤-٣])

$$\Rightarrow (b\,o\,a)\,o\,b = (a\,o\,b)\,o\,b$$ (o تجميعية)

$$\Rightarrow b\,o\,a = a\,o\,b$$ (نظرية [١٤-٣])

ولما كانت المساواة الأخيرة صحيحة أيا كان a , b من G ، فان (G, o) زمرة آبلية .

(٢) إذا كانت العلاقة الثانية صحيحة ، فانه أيا كان العنصران a , b من G نجد :

$$a^2 = e\ ,\ b^2 = e\ ,\ (a\,o\,b)^2 = e \Rightarrow a^2\,o\,b^2 = e\ ,\ (a\,o\,b)^2 = e$$
$$\Rightarrow a^2\,o\,b^2 = (a\,o\,b)^2$$

وبتطبيق نتيجة الشق (١) من هذه المسألة نجد المطلوب .

(٣) لنفرض أخيراً تحقق العلاقة الثالثة . عندئذ أيا كان العنصران a , b من G فان $(a\,o\,b)' = a\,o\,b$ لكن $(a\,o\,b)' = b'\,o\,a'$ استناداً إلى [١٧ - ٣] . إذن $a\,o\,b = b'\,o\,a'$. ولما كان $b' = b$ و $a' = a$ ، فان $a\,o\,b = b\,o\,a$ وبما أن هذه المساواة صحيحة أيا كان a , b من G ، فان (G, o) زمرة تبديلية .

۸۸ - لتكن $(E, \top)$ زمرة آبلية ، وليكن α عنصراً مثبتاً من E مغايراً للعنصر الحايد e . والمطلوب إثبات أن E زمرة آبليـــة كذلك بالنسبة للعملية الداخلية $\perp$ المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a, b \in E \; : \; a \perp b = a \top b \top \alpha \qquad (*)$$

الحل : (١) لما كانت $\top$ عملية داخلية ، فانه أيا كان a , b من E ، فان $a \top b \top \alpha$ عنصر من E أيضاً . وبالتالي فان E مغلقة بالنسبة للعملية $\perp$ ، أي أن $\perp$ عملية داخلية على E .

(٢) العملية الداخلية $\perp$ تجميعيـة ، ذلك أنه أيا كانت العناصر a , b , c من E فان :

$$(a \perp b) \perp c = (a \top b \top \alpha) \perp c = (a \top b \top \alpha) \top c \top \alpha$$

$$= a \top b \top \alpha \top c \top \alpha \qquad (\text{لاضرورة للأقواس لأن } \top \text{ تجميعية})$$

$$= a \top b \top c \top \alpha \top \alpha \qquad (\top \text{ تبديليـــة})$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$a \perp (b \perp c) = a \perp (b \top c \top \alpha) = a \top (b \top c \top \alpha) \top \alpha$$

$$= a \top b \top c \top \alpha \top \alpha \qquad (\text{لا ضرورة للأقواس لأن } \top \text{ تجميعية})$$

وبالتالي فان العملية $\perp$ تجميعية لأننا وجدنا أن :

$$\forall a, b, c \in E \; : \; (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

(٣) العملية $\perp$ تبديلية ، ذلك أن $\top$ تبديلية وبالتالي فلا فرق بين الناتج ($a \top b \top \alpha$ الذي يساوي $a \perp b$) وبين الناتج ($b \top a \top \alpha$ الذي

يساوي $b \perp a$) ، وذلك أيا كان a , b من E .

(٤) إذا وجد عنصر محايد u لـ $\perp$ ، فأياً كان a من E يكون :

$$a \perp u = a \Leftrightarrow a \top u \top \alpha = a \Leftrightarrow a \top (u \top \alpha) = a$$

$$\Leftrightarrow u \top \alpha = e$$

واستناداً إلى وجود نظير واحد لكل عنصر من زمرة ، فان u موجود ووحيد ويساوي α' نظير α **بالنسبة العملية** $\top$ (تحقق من أن $\forall a \in E \ : \ a \perp \alpha' = \alpha' \perp a = a$)

(٥) كي يوجد لأي عنصر a من E نظير $\overline{a}$ **بالنسبة العملية** $\perp$ ، فانه يجب أن يتحقق الشرط :

$$\overline{a} \perp a = \alpha' \Leftrightarrow \overline{a} \top a \top \alpha = \alpha'$$

واستناداً إلى [١٨ - ٣] نرى أن $\overline{a}$ موجود ووحيد ويساوي $\alpha' \top (a \top \alpha)'$ أو $\alpha' \top \alpha' \top a'$. (تحقق من أن

$$\forall a \in E \ : \ \overline{a} \perp a = a \perp \overline{a} = \overline{\alpha}$$)

إن توفر الشروط (١) - (٥) يعني أن ($E , \perp$) زمرة تبديلية وهو المطلوب .

٨٩ - لتكن S زمرة ضربية غير آبلية عنصرها المحايد e ، ولتكن a , b , c , d أربعة عناصر من S ناتجها $a b c d$ يساوي e .

(١) برهن أن كلا من النواتج التالية يساوي e أيضاً :

$$b c d a \ , \ c d a b \ , \ d a b c$$

(٢) عبر عن d^{-1} نظير d بدلالة a , b , c ، ثم عين $d^{-1}c^{-1}$ بدلالة a , b .

الحل : (١) لدينا :

$$abcd = e \Leftrightarrow a^{-1}(abcd)a = a^{-1}ea$$

$\Rightarrow (a^{-1}a)(bcda) = a^{-1}ea$ (عملية الضرب تجميعية)

$\Rightarrow bcda = e$ (لأن $a^{-1}a = e$)

$\Rightarrow b^{-1}(bcda)b = b^{-1}eb \Rightarrow (b^{-1}b)(cdab) = b^{-1}eb$

(عملية الضرب تجميعية)

$\Rightarrow cdab = e$ (لأن $b^{-1}b = e$)

$\Rightarrow c^{-1}(cdab)c = c^{-1}ec \Rightarrow (c^{-1}c)(dabc) = c^{-1}ec$

(عملية الضرب تجميعية)

$\Rightarrow dabc = e$ (لأن $c^{-1}c = e$)

(٢) وجدنا الآن أن $dabc = e$. إذن $d(abc) = dd^{-1}$. وتقتضي هذه المساواة [١٤ ـ ٣] المساواة $abc = d^{-1}$ ، ونكون بهذا قد عبرنا عن d^{-1} بدلالة a , b , c .

هذا ومن الواضح أن المساواة $abc = d^{-1}$ تقتضي $(abc)c^{-1} = d^{-1}c^{-1}$.
ولما كانت عملية الضرب تجميعية فان : $ab(cc^{-1}) = d^{-1}c^{-1}$. لكن $cc^{-1} = e$ إذن $ab = d^{-1}c^{-1}$.

٩٠ ـ لتكن G مجموعة كل الأزواج المرتبة (a , b) من الأعداد الحقيقية بفرض $a \neq 0$ ، ولنعرف على G عملية الضرب التالية :

$$(a , b)\ (c , d) = (a c , b c + d) \qquad (*)$$

أولاً : برهن أن G زمرة **غير** تبديلية بالنسبة لعملية الضرب هذه .

ثانياً : برهن أن مجموعة العناصر $(a , 0)$ تشكل زمرة جزئية H من الزمرة G ، وأن H إيزومورفية للزمرة $(R^* , \cdot)$ (أي زمرة الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر بالنسبة لعملية الضرب العادية) .

ثالثاً : لنعرف تطبيقاً $\varphi : G \to R$ بالقاعدة $\varphi((a , b)) = a$.
بين أن $\varphi^{-1}(1)$ (أي مجموعة العناصر من G التي خيال كل منها هو العدد الحقيقي 1) تشكل زمرة جزئية من G ، وأن هذه الزمرة الجزئية إيزومورفية للزمرة $(R , +)$ (أي زمرة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع العادية) .

الحل :

أولاً : (١) إن عملية الضرب المعرفة بالقاعدة $(*)$ هي عملية داخلية على G ، ذلك أن $(ac , bc + d)$ ناتج ضرب العنصرين الاختياريين (a , b) و (c , d) من G هو زوج مرتب أيضاً مسقطه الأول ac مغاير للصفر .

(٢) إن عملية الضرب على G تجميعية ، ذلك أنه لو افترضنا (f , g) عنصراً اختيارياً ثالثاً من G فإن :

$$((a , b)(c , d))\ (f , g) = (a c , b c + d)\ (f , g) =$$
$$(a c f , b c f + d f + g)$$

$$(a , b) ((c , d) (f , g)) = (a , b) (c f , d f + g) =$$
$$(a c f , b c f + d f + g)$$

(٣) إذا وجـــد عنصر محايد (x, y) في G ، فيجب أن تتحقق العلاقتان :

$$\forall (a , b) \in G \quad : \quad (a , b) (x , y) = (a , b) \text{ و } (x , y) (a , b) = (a , b)$$

إن هاتين العلاقتين تكافئان جملة المعادلات الخطية التالية :

$$a x = a \quad , \quad b x + y = b$$
$$x a = a \quad , \quad y a + b = b$$

ومن الواضح أنه يوجد لهذه الجملة الحل الوحيد (*) $x = 1(\neq 0) , y = 0$.

وبالتالي فان العنصر المحايد في G هو $(1 , 0)$.

(٤) إذا كان العنصر (ξ , η) مقلوباً (أي نظيراً بالنسبة للضرب) للعنصر الاختياري (a , b) ، فيجب أن يحقق المعادلتين :

$$(a , b) (\xi , \eta) = (1 , 0) \text{ و } (\xi , \eta) (a , b) = (1 , 0)$$

اللتين تكافئان جملة المعادلات الأربع التالية :

$$a \xi = 1 \quad , \quad b \xi + \eta = 0$$
$$\xi a = 1 \quad \quad \eta a + b = 0$$

(*) يكفي أن يكون هذا الحل موجوداً حتى يكون وحيداً (النظرية [١٣ - ٣]) .

ومن الواضح أنـــه يوجد لهـــذه العملية الحـــل الوحيد (*)

$\xi = \frac{1}{a} (\neq 0) , \eta = - \frac{b}{a}$ وبالتاليفان للعنصر (a , b) الاختياري من G

المقلوب الوحيد $\left(\frac{1}{a} , - \frac{b}{a}\right)$.

نستخلص مما سبق أن G تشكل زمرة (ضربية) . لكن هذه الزمرة غير آبلية ، ذلك أنه مثلاً :

$$(4 , 3) \left(- \tfrac{1}{2} , 0\right) = \left(- 2 , - \frac{3}{2}\right) \neq \left(- \tfrac{1}{2} , 0\right) (4 , 3) = (- 2 , 3)$$

ثانياً : (١) من الواضح أن $H \neq \Phi$.

(٢) أيا كان العنصران (b , 0) , (a , 0) من H ، فان

(استناداً إلى (٤)) $(a , 0) (b , 0)^{-1} = (a , 0) \left(\frac{1}{b} , - \frac{0}{b}\right) =$

$$= \left(\frac{a}{b} , 0 \frac{1}{b} - \frac{0}{b}\right) = \left(\frac{a}{b} , 0 \right) \in H$$

وبالتالي فاننا نحكم [٣٣ - ٣] أن H زمرة جزئية من الزمرة G .

لنعرف الآن التـــابـع $f : H \to R^*$ بالدستور $f ((a , 0)) = a$ ،

ولنبرهن أن f إيزومورفيزم للزمرة الجزئية H من G على الزمرة الضربية (R* , ·) .

في الحقيقة :

(*) يكفي أن يكون الحل موجوداً حتى يكون وحيداً (النظرية [١٣ — ٣]) .

$$\forall (a , 0) , (b , 0) \in H \ : \ f((a , 0)(b , 0)) = f((a b , 0)) =$$
$$a b = f(a , 0) \ f(b , 0)$$

فاذا أضفنا إلى ذلك أن f تقابل ، أي تطبيق متبـــاين وغامر ، (لماذا ؟) حصلنا على المطلوب .

ثالثاً : نلاحظ أولاً أن φ هومومورفيزم للزمرة الضربية G في الزمرة $(R^* , \cdot)$ ، ذلك أن :

$$\forall (a , b) , (c , d) \in G \ : \ \varphi((a , b)(c , d)) = \varphi((a c , b c + d))$$
$$= a c = \varphi(a , b) \ \varphi(c , d)$$

ولما كان العدد 1 هو العنصر المحايد في الزمرة الضربية $(R^* , \cdot)$ فان المجموعة $\varphi^{-1}(1)$ زمرة جزئية من G (النظريه [٤٢ - ٣]) .

سنبين الآن وجود إيزومورفيزم للزمرة الجزئية $\varphi^{-1}(1)$ والتي دعامتها المجموعة $\{(1 , b) : b \in R\}$ على الزمرة $(R , +)$. من الواضح أن التطبيق $\psi : \varphi^{-1}(1) \to R$ المعرف بالقاعدة :

$$\psi((1 , b)) = b$$

هو تطبيق غامر ومتباين (تحقق من هذا) . فاذا لاحظنا بالاضافة الى ذلك أن :

$$\psi((1 , b)(1 , d)) = \psi((1 , b + d)) = b + d =$$
$$= \psi(1 , b) + \psi(1 , d)$$

فاننـــا نحكم بأن ψ إيزومورفيزم الزمرة الجزئيـــة $\varphi^{-1}(1)$ من G على الزمرة الجمعية لـ R .

١٩ - لقد عرف الروسي كوروش Kurosh الزمرة على النحو التالي : نقول عن مجموعة G عليها عملية داخلية o إنها زمرة بالنسبة للعملية o ، إذا كانت G غير خالية ، وكانت o تجميعية ، وكان لكل من المعادلتين :

$$a o x = b \quad , \quad y o a = b$$

حل وحيد في G أيا كان العنصران a, b من G

برهن أن تعريف كوروش للزمرة يكافىء التعريف الشائع [١ - ٣] للزمرة .

أولاً : إن التعريف [١ - ٣] يقتضي تعريف كوروش ، ذلك أنه وفق التعريف [١ - ٣] تكون G غير خالية (لاحتوائها على العنصر الحايد e) ، وتكون o تجميعية ، ويكون أخيراً للمعادلتين حل وحيد في G وذلك استناداً إلى النظرية [١٨ - ٣] .

ثانياً : سنثبت الآن أن تعريف كوروش يقتضي [١ - ٣] . لما كانت $G \neq \Phi$ وفق كوروش ، فهنالك عنصر b على الأقل ينتمي إلى G . لنفترض (استناداً إلى (١)) أن u هو العنصر الوحيد الذي يحقق المعادلة $b o u = b$ ، وأن y هو العنصر الوحيد الذي يحقق المعادلة $y o b = a$ ، حيث a أي عنصر آخر من G (قد يكون a مساوياً b) . عندئذ ، لما كانت o تجميعية فان :

$$a o u = (y o b) o u = y o (b o u) = y o b = a$$

ولما كانت هذه العلاقة صحيحة أيا كان a من G ، فان u هو هو عنصر محايد أيمن لـ o . وبنفس الطريقة نبرهن على وجود عنصر محايد أيسر لـ o ، أي عنصر e من G بحيث تحقق المساواة :

$$e \circ a = a$$

أيا كان a من G . لكن e = u استناداً إلى [٢٧ - ١] ، إذن نجد أن :

$$\forall a \in G \; : \; e \circ a = a \circ e = a$$

ونكون بهذا قد أثبتنا وجود عنصر محايد (وحيد) e في G لـ o .

لنفترض الآن أن a عنصر اختياري من G . عندئذ يترتب على (١) وجود عنصرين a'' و a' وحيدين بحيث :

$$a \circ a' = e \;\; , \;\; a'' \circ a = e$$

لكن $a' = a''$ [٢٨ - ١] ، إذن لكل عنصر a نظير a' بالنسبة لـ o يحقق :

$$a \circ a' = a' \circ a = e$$

وهكذا نرى أن تعريف كوروش يقتضي (بالاضافة إلى تجميعية العملية الداخلية o) وجود عنصر محايد لـ o ووجود نظير لكل عنصر من G ، أي أن تعريف كوروش يقتضي التعريف [١ - ٣] .

ولما كنا قد أثبتنا العكس ، أي أن التعريف [١ - ٣] يقتضي تعريف كوروش ، فان هذين التعريفين متكافئان وهو المطلوب .

* ٩٢ - لتكن $G = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ زمرة ضربية منتهية (مرتبتها $n+1$) وعنصرها المحايد a_0 . برهن أنه أيا كان العنصر a_i من G ، فهنالك عدد صحيح موجب m بحيث $a_i^m = a_0$.

الحل : لما كان $a^1_0 = a_0$ [١٩-٣] فالمسألة محلولة من أجل العنصر المحايد a_0 .

لنأخذ الآن عنصراً اختيارياً a_i من G حيث $a_i \neq a^0$. فاذا رمزنا بـ a_j من G لمقلوب a_i ، فان $a_i a_j = a_0$. إن $j \neq o$ لأنه في الحالة المعاكسة يكون $a_i = a_0$. فاذا كان $j = i$ ، نجد $a_i^2 = a_0$. ولكن إذا كان $j \neq i$ ، فان :

$$a_i a_j = a_0 \qquad (j \neq o \;,\; j \neq i)$$

فاذا رمزنا بـ a_k للعنصر الوحيد الذي يحقق $a_i a_k = a_j$ فانه يكون :

$$a_i\ a_j = a_0 \Rightarrow a_i (a_i\ a_k) = a_0 \Rightarrow (a_i\ a_i)\ a_k = a_0 \Rightarrow a_i^2\ a_k = a_0$$

إن $k \neq 0$ لأنه لو صح العكس لكان $a_i a_0 = a_j$ أو $a_i = a_j$ أي $i = j$ ، الأمر الذي استبعدناه . وهنا نقول ثانية : إما أن يكون $k = i$ ، وعندها يكون $a_i^3 = a_0$ ، ولكن إذا كان $k \neq i$ فاننا نجد :

$$a_i^2\ a_k = a_0 \qquad (k \neq o \;,\; k \neq i)$$

وهكذا فلو سرنا بهذا الطريق لوجدنا حالتين لا ثالث لهما :

(١) فإما أن نجد عدداً صحيحاً موجباً m بحيث يكون $a^m = a_0$.

(٢) وإما أن لا يتم ذلك ، وعندها نحصل على مجموعة المساويات :

$$a_i\, a_j = a_0\ ,\ a_i^2\, a_k = a_0\ ,\ \ldots\ ,\ a_i^n\, a_h = a_0 \qquad (**)$$

حيث كل من العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ مغاير لـ a_0 ول a_i . ولما كان كل من العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ منتمياً إلى G ، فان عددها هو على الأكثر $n-1$ (لاستبعاد العنصرين a_0 , a_i) . ولكن إذا لاحظنا أن العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ الواردة كمضاريب في مجموعة المساويات (**) مختلفة (لماذا ؟) ، وأنه من الواضح بأن عدد المساويات (**) يساوي n فإننا نستنتج أن عدد العناصر $a_j , a_k , \ldots , a_h$ يساوي n . وهذا تناقض.

وبالتالي فان الحالة (٢) غير صحيحة . لذا فان الحالة (١) هي الحالة الصحيحة وهو المطلوب .

٩٣ ـ برهن أن مجموعة الأعداد $H = \{ 2^m 3^n \mid m , n \in Z \}$ تشكل زمرة جزئية من زمرة الأعداد الحقيقية المغـــايرة للصفر بالنسبة لعملية الضرب العادية .

الحل : (١) من الواضح أن $H \neq \Phi$.

(٢) ليكن $2^m 3^n$, $2^{m'} 3^{n'}$ أي عنصرين من H . إن مقلوب العنصر $2^{m'} 3^{n'}$ (أي نظير o بالنسبة لعملية الضرب) هو $2^{-m'} 3^{-n'}$ (لأن حاصل ضرب أحد هذين العنصرين بالعنصر الاخر من اليمين ومن اليسار يساوي العنصر الحايد 1) . وإذا لاحظنا أن :

$$(2^m\ 3^n)\ (2^{-m'}\ 3^{-n'}) = (2^{-m'}\ 3^{-n'})\ (2^m\ 3^n) = 2^{m-m'}\ 3^{n-n'}$$

وأن $m - m'$ و $n - n'$ ينتميان إلى Z ، فان حاصل الضرب في الطرف الأيمن عنصر من H . وبالتالي فان H زمرة جزئية من $(R^*, \cdot)$ حسب [٣٣ - ٣] .

* ٩٤ - لتكن (G, o) زمرة عنصرها المحايد e . تسمى المجموعة الجزئية Z_G من عناصر G التي كل عنصر منها قابل للمبادلة مع جميع عناصر G مركزاً الزمرة G أي أن :

$$Z_G = \{ z \in G \mid z \, o \, x = x \, o \, z \ , \ \forall x \in G \}$$

برهن أن Z_G زمرة جزئية من الزمرة G .

الحل : (١) إن $Z_G \neq \Phi$ ، ذلك أن $e \, o \, x = x \, o \, e$ أيا كان x من G وبالتالي فان $e \in Z_G$.

(٢) ليكن z_1 , z_2 أي عنصرين من Z_G . عندئذ ، أيا كان x من G فان :

$$z_1 \, o \, x = x \, o \, z_1 \Rightarrow z_2 \, o \, (z_1 \, o \, x) = z_2 \, o \, (x \, o \, z_1)$$

(o هي عملية وحيدة القيمة)

$$\Rightarrow (z_2 \, o \, z_1) \, o \, x = (z_2 \, o \, x) \, o \, z_1 \qquad (\ o \ \text{تجميعية})$$

$$\Rightarrow (z_2 \, o \, z_1) \, o \, x = (x \, o \, z_2) \, o \, z_1 \qquad (\ o \ \text{تجميعية})$$

ولما كانت المساواة الأخيرة صحيحة أيا كان x من G فان $z_2 \, o \, z_1$ عنصر من Z_G . وبالتالي فان المجموعة الجزئية Z_G مغلقة بالنسبة لـ o .

(٣) من الواضح أنه أيا كان x من G و z من Z_G فان :

$z \, o \, x' = x' \, o \, z$ لكن :

$$z \circ x' = x' \circ z \Rightarrow (z \circ x')' = (x' \circ z)' \Rightarrow (x')' \circ z' = z' \circ (x')'$$

$$\Rightarrow x \circ z' = z' \circ x \qquad ([٣-١٦])$$

وهكذا نرى أنه إذا كان 'z أي عنصر من Z_G ، فان 'z (نظيره بالنسبة لـ o) عنصر من Z_G .

إن تحقق الشروط (١) - (٣) كاف للحكم بأن Z_G زمرة جزئية من الزمرة G (نظرية [٢٩ - ٣]) .

* **٩٥** - لتكن (G , o) زمرة دوّارة منتهية مرتبتها n ومولدها a .
برهن أن $a^n = e$ ، كما أن العناصر المختلفة في G هي :

$$\{ a , a^2 , \dots , a^{n-1} , a^n = e \}$$

الحل : لنفرض أن $a^m = e$ حيث $m < n$. عندئذ إذا كان k أي عدد صحيح ، فهنالك عددان صحيحان q , r ($0 \leqslant r < m$) بحيث يكون $k = qm + r$. عندها نرى أن :

$$a^k = a^{qm+r} = (a^m)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = a^r$$

وهـــذا يعني أن a^k هو أحد العناصر $a^0 , a , a^2 , \dots , a^{m-1}$ ، أي أن G تحتوي على m من العناصر على الأكثر . ولما كانت G تحتوي على n من العناصر ، فاننا نقع في تناقض . وبالتالي فان افتراضنا أن $a^m = e$ حيث $m < n$ خاطىء .

لنفترض بعد ذلك $a^i = a^j$ حيث $0 < i < j \leqslant n$. عنـدها يكون $a^i \circ a^{-i} = a^j \circ a^{-i}$ أي $a^{i-i} = a^{j-i}$ ، أو $e = a^{j-i}$. ولـــا كان

$n > i - j > 0$ ، فان هذه النتيجة خاطئة استناداً إلى ما سبق ، وبالتالي فان $a, a^2, \ldots, a^n$ عناصر مختلفة . ولما كانت G تحتوي على n من العناصر تماماً ، فان هذه المجموعة من العناصر يجب أن تحوي جميع عناصر G . ولما كان العنصر e من G ، فان e هو أحد هذه العناصر a^i ($1 \leqslant i \leqslant n$) . وبما أننا وجدنا أن $a^m \neq e$ عندما $m < n$ فان $a^n = e$ ونكون بذلك قد أتممنا البرهان .

٩٦ـ لتكن G زمرة ضربية آبلية ، H زمرة جزئية من G . برهن أن العلاقة R المعرفة على G :

$$x R y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H$$

هي علاقة تكافؤ في G ، وأن هذه العلاقة منسجمة مع عملية الضرب أي أن :

$$x R y \Rightarrow (x z) R (y z)$$

ماهو صنف تكافؤ عنصر من H ؟

الحل : (١) لما كانت أي زمرة جزئية من زمرة G تحتوي على العنصر الحايد e في G ، فان $e \in H$. ولكن $xx^{-1} = e$ ايا كان x من G ، لذا فإننا نجد :

$$\forall x \in G \quad : \quad x R x$$

أي أن العلاقة R منعكسة .

(٢) لنفرض أن $x R y$. إن هذا يعني أن $x y^{-1} \in H$. ولما

كانت H زمرة (لأنها زمرة جزئية) ، فان H تحوي نظير العنصر $x\,y^{-1}$ ، أي العنصر $(x\,y^{-1})^{-1}$ الذي يساوي كما نعلم yx^{-1} (لأن $y = (y^{-1})^{-1}$) . ولكن $y\,x^{-1} \in H$ تعني أن $y\,R\,x$. وهكذا فإننا نرى أن :

$$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$$

أي أن العلاقة R متناظرة .

(٣) لنفرض $x\,R\,z$ ، $x\,R\,y$. إن هذا يعني أن $y\,z^{-1} \in H$ و $x\,y^{-1} \in H$. ولما كانت H مغلقة بالنسبة لعملية الضرب (لأنها زمرة تعريفاً) فان :

$$(x\,y^{-1})\,(y\,z^{-1}) = x\,(y^{-1}\,y)\,z^{-1} = x\,e\,z^{-1} = x\,z^{-1}$$

عنصر من H . ولكن $xz^{-1} \in H$ تعني $x\,R\,z$. وبالتالي فقد وجدنا أن :

$$x\,R\,y \text{ و } y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$$

أي أن العلاقة R متعدية .

وهكذا نرى مما تقدم أن العلاقة R منعكسة ومتناظرة ومتعدية ، إذن R علاقة تكافؤ في G .

(٤) إن :

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x^{-1}\,y \in H \Leftrightarrow x\,(z^{-1}\,z)\,y^{-1} \in H \qquad (\text{لأن } z^{-1}z = e)$$

$$\Leftrightarrow (x\,z^{-1})\,(z\,y^{-1}) \in H \qquad (\text{لأن عملية الضرب تجميعية})$$

$\Rightarrow (x z^{-1}) (y z^{-1})^{-1} \in H$ (حسب [٣-١٧])

$\Leftrightarrow (x z) R (y z)$

(٥) لنفرض a عنصراً من H . إن صنف تكافؤ هـذا العنصر هو مجموعة كل العناصر y من G التي تكافىء a أي التي ترتبط بـ a بالعلاقة $a R y$ أي بالعلاقة $a y^{-1} \in H$. ونترك للقارىء التأكد من أن مجموعـة العناصر هذه هي H نفسها . وبالتالي فان صنف تكافؤ عنصر a من H هو H نفسها .

٩٧ - لتكن (G, o) زمرة ، H مجموعة جزئيـة منتهية منها . برهن أنه إذا كانت H غير خالية ومغلقة بالنسبة لـ o فان H زمرة جزئية من الزمرة G .

الحل : يكفي أن نبرهن بأن نظير أي عنصر a من H ينتمي إلى H . ليكن a عنصراً من H . لما كانت H مغلقـــة بالنسبة لـ o ، فان $a^2 = a o a , a^3 = a^2 o a , \ldots , a^m , \ldots$ كلها عناصر من H . ولكن العناصر المختلفة من هذه المجموعة غير المنتهية من العناصر $a , a^2 , \ldots , a^m , \ldots$ يجب أن تكون منتهية ، لأن H منتهية فرضاً . وهذا يعني أن هنالك عددين طبيعيين k , h حيث $k > h > 0$ يكون من أجلهما $a^k = a^h$. ويترتب على هذا أن $a^{k-h-1} = a^{-1}$. ولما كان $k - h - 1 \geq 0$ ، فان a^{k-h-1} هو العنصر الحايد e $(e \in H)$ أو أحد العناصر $a , a^2 , \ldots , a^m , \ldots$ التي كل منها ينتمي إلى H . وبالتالي فان a^{-1} عنصر من H . وهو المطلوب .

٩٨ - ليكن Ox , Oy مستقيمين متعامدين في مستو Π ، ولتكن لدينا التطبيقات الأربعة التالية المستوي Π على نفسه : f_1 التطبيق المطابق و f_2 التناظر بالنسبة لـ Oy , f_3 التناظر بالنسبة لـ Ox , f_4 التناظر بالنسبة لـ O . برهن أن مجموعة هذه التطبيقات الأربعة المزودة بعملية تركيب التطبيقات هي زمرة آبلية .

الحل : وجدنا عند دراستنا للزمر التناظرية أن مجموعة التطبيقات المتباينة لمجموعة E على نفسها تشكل زمرة S_E بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات وعلى هذا الأساس فان مجموعة كل التطبيقات المتباينة والغامرة للمستوي π (أي المجموعة $R \times R$) على نفسه تشكل زمرة بالنسبة لتركيب التطبيقات .

إن التطبيقات الأربعة المفروضة يمكن التعبير عنها بالشكل :

$$f_1((x , y)) = (x , y) \quad , \quad f_2((x , y)) = (-x , y)$$

$$f_3((x , y)) = (x , -y) \quad , \quad f_4((x , y)) = (-x , -y)$$

من السهل التأكد من أن كلا من التطبيقات هذه متباين وغامر . وبالتالي فان المجموعة $H = \{ f_1 , f_2 , f_3 , f_4 \}$ هي مجموعة جزئية من $S_{R \times R}$. ويمكن التأكد كذلك من صحة الجدول التالي :

o	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

ولما كانت المجموعة الجزئية (غير الخالية) H منتهية ، فان كون H مغلقة بالنسبة لـ o (انظر الجدول) كاف للحكم بأن H زمرة جزئية من الزمر التناظرية $S_{R \times R}$ (انظر المثال السابق) . وبما أن الزمرة الجزئية هي زمرة تعريفاً ، فإن H هي زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات . وهذه الزمرة تبديلية لأن الجدول السابق متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي للجدول (أي القطر المار بالجهة العلوية اليسرى من الجدول) .

٩٩ - برهن أن أية زمرة جزئيـــة من زمرة آبليـة هي زمرة جزئية ناظمية .

الحل : لتكن $(G, \top)$ زمرة آبلية ، H زمرة جزئية منها . عندئذ أيا كان h من H و g من G :

$$g \top h \top g' = (g \top g') \top h \qquad \text{(لأن العملية } \top \text{ تجميعية وتبديلية)}$$

$$= e \top h = h \in H$$

وبالتالي فإن H زمرة جزئية ناظمية من G .

★ ١٠٠ - لتكن H , K زمرتين جزئيتين من الزمرة الضربية G بفرض الزمرة الجزئية K ناظمية ، برهن مايلي :

أولاً : إن $H \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من H .

ثانياً : إذا رمزنا بـ $\{hk \mid h \in H, k \in K\}$ = HK ، فان HK زمرة جزئية من الزمرة G .

الحل : **أولاً** : لما كانت H زمرة جزئية من الزمرة الضربيـة G

فهي زمرة ضربية . إن $H \cap K$ زمرة جزئية من الزمرة H لأن :

(١) $H \cap K$ مجموعة جزئية من H .

(٢) $H \cap K \neq \Phi$ لأن كلا من المجموعتين الجزئيتين H , K تحتوي على العنصر المحايد e في G .

(٣) إذا كان a , b أي عنصرين من $H \cap K$ فان ab^{-1} عنصر من $H \cap K$ (لماذا ؟)

ان الشروط (١) – (٣) تبين أن $H \cap K$ زمرة جزئية من H .

ولبرهان أن الزمرة الجزئية $H \cap K$ من H ناظمية يجب إثبات أن

$$\forall h \in H , \forall l \in H \cap K \quad : \quad h l h^{-1} \in H \cap K \qquad (1)$$

في الحقيقة ، لما كانت K زمرة جزئية ناظمية من G فإن :

$$\forall g \in G \; , \; \forall k \in K \quad : \quad g k g^{-1} \in K \qquad (2)$$

وبما أن $H \subseteq G$ ، $H \cap K \subseteq K$ ، فان (2) تقتضي :

$$\forall h \in H \; , \; \forall l \in H \cap K \quad : \quad h l h^{-1} \in K \qquad (3)$$

كذلك ، لما كانت H زمرة (جزئية) فان :

$$\forall h \; , \; k \in H \quad : \quad h k h^{-1} \in H \qquad (4)$$

وبما أن $H \cap K \subseteq H$ ، فان (4) يقتضي :

$$\forall h \in H \; , \; \forall l \in H \cap K \quad : \quad h l h^{-1} \in H \qquad (5)$$

ومن الواضح أنه يترتب على الشرطين (5) و (3) :

$$\forall h \in H , \forall l \in H \cap K \quad : \quad h l h^{-1} \in H \cap K$$

أي أن الزمرة الجزئية $K \cap H$ من الزمرة H ناظمية .

ثانياً : (١َ) من الواضح أن HK مجموعة جزئية من G .

(٢َ) إن $HK \neq \Phi$ ، ذلك أن كلا من الزمرتين الجزئيتين H , K من G تحتوي على العنصر المحايد e في G ، لذا فإن :

$$e\,e = e \in H K$$

(٣) ليكن $h_1 k_1 \, , \, h_2 k_2$ اي عنصرين من HK . ولو أدخلنا في اعتبارنا تجميعية عملية الضرب نجد :

$$(h_1 k_1)\,(h_2 k_2)^{-1} = (h_1 k_1)\,(k_2^{-1} h_2^{-1}) = h_1 (h_2^{-1} h_2)\, k_1 k_2^{-1} h_2^{-1}$$

(لأن $h_2^{-1} h_2 = c$)

$$= (h_1 h_2^{-1})\,[\, h_2 (k_1 k_2^{-1})\, h_2^{-1} \,] \qquad (6)$$

ولما كان $h_1 h_2 \in H$ (لأن H زمرة جزئية) وكان الناتج الموجود داخل القوسين [ ] عنصراً من K لأن $h_2 \in H$ ، $k_1 k_2^{-1} \in K$، ولأن K زمرة جزئية ناظمية ، فان الطرف الأيمن من (6) هو حاصل ضرب العنصر $h_1 h_2^{-1}$ من H بالعنصر [ ] من K ، أي أن ينتمي إلى HK .

وهكذا نرى أن (٢َ) تعني التالي :

$$\forall h_1 k_1 \, , \, h_2 k_2 \in H K \quad : \quad (h_1 k_1)\,(h_2 k_2)^{-1} \in H K$$

إن (١َ) - (٣َ) تعنيان استناداً إلى [٣٣ - ٣] ، أن HK زمرة

جزئية من الزمرة G .

۱۰۱ - ألا يمكن أن تكون زمرة آبلية إيزومورفية لزمرة غير آبلية ؟ ولماذا ؟

الحل : كلا . لنفترض جدلاً وجود إيزومورفيزم f للزمرة الآبلية $(G, \top)$ على الزمرة غير الآبلية (E, o) . فبما أن الزمرة E غير آبلية ، هنالك عنصران (على الأقل) c, d بحيث $c o d \neq d o c$.
وبما أن الايزومورفيزم تقابل ، فهنالك عنصران (وحيدان) a, b من G بحيث $f(b) = d$ ، $f(a) = c$. ولكن الزمرة G آبلية ، إذن $a \top b = b \top a$ ، وبالتالي فان $f(a \top b) = f(b \top a)$. وعندها

$$f(a \top b) = f(b \top a) \Rightarrow f(a) o f(b) = f(b) o f(a)$$
$$\Rightarrow c o d = d o c$$

ولما كان $c o d \neq d o c$ ، فإننا نصل إلى تناقض ، وبالتالي فان انطلاقنا من فرضية وجود الايزومورفيزم بين $(G, \top)$ و (E, o) خاطىء .

۱۰۲ - ليكن ψ هومومورفيزماً للزمرة الدوارة G التي مولدها g على الزمرة(*) E . برهن أن الزمرة E دوارة ومولدها $\psi(g)$.

الحل : إذا كان b عنصراً اختيارياً من E ، فهنالك عنصر (على الأقل) a من G بحيث $\psi(a) = b$. (وجود a ناتج عن كون ψ

(*) إذن ψ إبيمورفيزم .

تطبيقاً غامراً) . ولما كانت G زمرة دوارة مولدها g ، فهنالك عـدد صحيح m بحيث : $a = g^m$ ، أي أن $b = \psi(g^m)$. لكن $\psi : G \to E$ هومومورفيزم إذن $\psi(g^m) = [\,\psi(g)\,]^m$ (لماذا ؟) . لذا فهنالك عنصر $\psi(g)$ من E يحقق مايلي : أيا كان العنصر b من E ، فان $b = [\,\psi(g)\,]^m$ حيث m عدد صحيح . وهذا يعني أن الزمرة E دوارة مولدها $\psi(g)$ ، وهو المطلوب .

* **١٠٣** - لتكن (H , o) و (G , T) زمرتين دوارتين من مرتبة واحدة ، وليكن g مولداً اختياريا من G و h مولداً اختياريا من H . برهن على وجود إيزومورفيزم $\varphi : G \to H$ بحيث $\varphi(g) = h$.

الحل : لنفرض أن مرتبـة كل من الزمرتين n ، وأن e , u هما العنصران الحايدان في G , H على الترتيب . عندها نجد استناداً إلى التمرين (٩٥) :

$$G = \{\, g , g^2 , \ldots , g^n = e \,\} \quad , \quad H = \{\, h , h^2 , \ldots , h^n = u \}$$

مع ملاحظة أن العناصر الداخلة في كل من H ، G مختلفة .

سنبرهن الآن على أن التطبيق $\varphi : G \to H$ المعرف بالقاعدة :

$$\varphi(g^m) = h^m \qquad (1 \leqslant m \leqslant n) \qquad (*)$$

هو إيزومورفيزم لـ G على H .

في الحقيقة ، إن التطبيق φ غامر ، لأنـه أيا كان العنصر h^m من H ، فانه خيال للعنصر g^m ، كذلك فان التطبيق φ متباين ، ذلك أن :

$$\varphi(g^{m'}) = \varphi(g^{m''}) \Rightarrow h^{m'} = h^{m''} \Rightarrow m' = m'' \Rightarrow g^{m'} = g^{m''}$$

ولاثبات أن φ هومومورفيزم نفرق بين حالتين :

(١) فإذا كان $m' + m'' \leqslant n$ $(1 <)$ فيمكن عندئذ تطبيق القاعدة (*) ونجد :

$$\varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'+m''})$$

$$= h^{m'+m''} \qquad \text{(وفق (*))}$$

$$= h^{m'} o\, h^{m''} = \varphi(g^{m'})\, o\, \varphi(g^{m''})$$

(٢) وإذا كان $m' + m'' > n$ ، فإن العدد الصحيح $p = m' + m'' - n$ موجب من جهة ، كما أن $p \leqslant n$ (لأن $m' + m'' \leqslant 2n$) . وعندها نجد استناداً إلى (*) :

$$\varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'+m''}) = \varphi(g^{n+p}) = \varphi(g^n \top g^p)$$

$$= \varphi(e \top g^p) = \varphi(g^p) = h^p = h^{m'+m''-n} =$$

$$= h^{m'}\, o\, h^{m''}\, o\, h^{-n}$$

$$= h^{m'}\, o\, h^{m''}$$

(لأن $h^{-n} = h^{-n}\, o\, u = h^{-n}\, o\, h^n = h^{n-n} = h^0 = u$)

$$= \varphi(g^{m'})\, o\, \varphi(g^{m''})$$

وهكذا فإن (١) - (٢) يبينان أن :

$$\forall\, g^{m'}, g^{m''} \in G \quad : \quad \varphi(g^{m'} \top g^{m''}) = \varphi(g^{m'})\, o\, \varphi(g^{m''})$$

وبالتالي فإن φ هومومورفيزم لـ G في H وإذا أضفنا إلى ذلك ماوجدناه بأن φ تقابل بين G و H ، استنتجنا أن φ إيزومورفيزم لـ G على H ، وأن هذا الايزومورفيزم يحقق استناداً إلى القاعدة (*) :

$$\varphi(g) = h$$

تمارين غير محلولة

١٠٤ ـ بين ما إذا كان كل من المجموعات التاليـة تشكل زمرة بالنسبة للعملية الداخلية المجـــاورة أم لا . برر جوابك في كل من هذه الحالات .

(أ) مجموعة الأعداد الحقيقية $a + b\sqrt{2}$ ، حيث a , b عـــددان صحيحان ، والعملية الداخلية هي عملية الجمع العادية .

(ب) مجموعة الأعداد الحقيقية المغـايرة للصفر $a + b\sqrt{2}$ ، حيث a , b عددان عاديان (عقليان) والعملية هي عملية الضرب العـــادية . (العدد العقلي هو العدد الذي يمكن كتابته على شكل كسر صورته عدد صحيح ومخرجه عدد صحيح مغاير للصفر) .

(حـ) مجموعة التباديل :

$$\left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \right\}$$

بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .

(د) المجموعة $U = \{ x , y \}$ بالنسبة للعملية o المعرفة بالجدول

o	x	y
x	x	y
y	y	x

١٠٥ - هل تشكل مجموعة الأعداد الصحيحة زمرة بالنسبة لعملية الطرح العادية ، ولماذا ؟

١٠٦ - إن مجموعة الأعـــداد الصحيحة Z تشكل زمرة بالنسبة للعملية * المعرفة بالقاعدة :

$$\forall a , b \in Z \quad : \quad a * b = a + b - 5$$

أوجد العنصر المحايد لـ * ، ثم أوجد الدستور الذي يعين نظير أي عنصر من هذه الزمرة بالنسبة لـ * .

١٠٧ - لتكن G زمرة جمعية آبليـة . برهن (إما مباشرة أو بالاعتماد على النظريات الخاصة بالزمرة) صحة المتطابقات التالية أياً كانت العناصر a , b , c من G :

1) $-(-a-b) = a+b$

2) $a-0=a$

3) $(c-b)-(a-b)=c-a$

4) $-(a-b)=-a+b=b-a$

5) $(c-b)+(b-a)=c-a$

١٠٨ - اكتب التطبيقـات الواردة في التمرين الســـابق بفرض الزمرة G ضربية .

١٠٩ - لتكن S مجموعة مزودة بعملية داخلية تجميعية □ . برهن أنه إذا كان كل عنصر في S منتظماً فإن (S , □) تشكل زمرة .

* ١١٠ - برهن أنه إذا تحققت الشروط التالية في مجموعة عليها عملية داخلية o :

(١) أن تكون o تجميعية .

(٢) أن يوجد في G عنصر محايد أيسر لـ o .

(٣) أن يوجد لكل عنصر من G نظير أيسر بالنسبة لـ o .

فإن (G , o) تشكل زمرة .

١١١ - برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة آبلية هي آبلية أيضاً أورد مثالاً تبين فيه أن العكس غير صحيح .

١١٢ - بين أن المجموعة $\{ x | x \in Z , 5 | x \}$ هي زمرة جزئية من زمرة الأعداد الصحيحة Z بالنسبة لعملية الجمع العادية . (الرمز $5 | x$ يعني أن العدد 5 يقسم العدد x) .

١١٣ - برهن أن مجموعة الأشعة المقيدة على الفراغ الاقليدي ذي الأبعاد الثلاثة والمنبعثة من النقطة O تشكل زمرة بالنسبة لعملية جمع الأشعة (وفق قاعدة متوازي الأضلاع) هل تشكل مجموعة الأشعة المقيدة الصادرة عن O والتي تقع نهاياتها على مستقيم في الفراغ زمرة جزئية من الزمرة السابقة ؟

١١٤ - برهن أن كل زمرة جزئية من زمرة دوارة هي زمرة دوارة كذلك .

١١٥ - ما هو عدد مولدات الزمرة الدوارة من المرتبة n ؟

١١٦ - لتكن (G , *) زمرة ، H مجموعة جزئية غير خالية من G . برهن أن الشرط اللازم والكافي حتى تكون H زمرة جزئية من

الزمرة G هو :

$$\forall a, b \in H \ : \ a^{-1} b \in H$$

١١٧ - لتكن H , K زمرتين جزئيتين من الزمرة G . برهن أن $H \cap K$ زمرة جزئية من كل من G , H , K .

١١٨ - برهن أنه إذا كانت كل من H , K زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G ، فان H K زمرة جزئية ناظمية من G كذلك .

$$(HK = \{ hk : h \in H , k \in K \})$$

* ١١٩ - لتكن (G , o) زمرة عنصرها المحايد e ، (S , ▭) زمرة عنصرها المحايد u ، وليكن :

$$J = G \times S = \{ (g , s) \mid g \in G , s \in S \}$$

لنعرف « حاصل ضرب » الزوجين (g_1 , s_1) و (g , s) من J بالقاعـــدة .

$$(g , s) \, (g_1 , s_1) = (g \circ g_1 , s \,\square\, s_1)$$

(أ) برهن أن J زمرة بالنسبة لعملية الضرب هذه .

(ب) برهن أن $H = \{ (g , u) \mid g \in G \} , K = \{ (e , s) \mid s \in S \}$ زمرتان جزئيتان من J .

(حـ) برهن أن كلا من التطبيقين :

$$H \to G : (g , u) \to g \quad و \quad K \to S : (e , s) \to s$$

إيزومورفيزم .

١٢٠ - لتكن G زمرة ضربية ، a , b عنصران من G . فاذا فرضنا أن H زمرة جزئية من G وعرفنا :

$$Ha = \{ ha \mid h \in H \} , Hb = \{ hb \mid h \in H \}$$

فبرهن أن :

$$a \in Hb \Rightarrow Ha = Hb$$

١٢١ - لتكن لدينا الزمرتان (Z , +) و (R^* , •) . برهن أن التطبيق $f : Z \to R^*$ المعرف بالقاعدة $f(n) = a^n$ ، حيث a عنصر مثبت من R^* هو هومومورفيزم .

١٢٢ - برهن أن زمرة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع العادية ، وزمرة الأعداد الصحيحة الزوجية بالنسبة للعملية نفسها إيزومورفيتان ؟

١٢٣ - هل التطبيق $\varphi(x) = e^x$ إيزومورفيزم لزمرة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع على زمرة الأعداد الحقيقية الموجبة بالنسبة لعملية الضرب ؟

١٢٤ - لتكن (V , +) زمرة الأشعة المنبثقة من نقطة ثابتة O في الفراغ الاقليدي العادي بالنسبة لعملية جمع الأشعة ، وليكن Π مستوياً ماراً من O . برهن أن التناظر بالنسبة لهذا المستوي هو أوتومورفيزم .

١٢٥ - برهن أن الخيال الهومومورفي لأي زمرة دوارة هو زمرة دوارة .

١٢٦ - لتكن G زمرة ضربية ، g عنصراً مثبتاً من G . لنعرف

تابعاً $G \to G$: Φ بالقاعدة $\Phi(x) = gxg^{-1}$. برهن أن Φ هو إيزومورفيزم لـ G على G .

١٢٧ - لتكن V مجموعة الأشعة الصادرة عن نقطة ثابتة من الفراغ الاقليدي R^3 . نقول عن التابع :

$$f_{\vec{a}} : \vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}$$

إنه انسحاب في R^3 موافق للشعاع $\vec{a}$. برهن أن مجموعة الانسحابات تشكل زمرة بالنسبة لعملية تركيب التطبيقات .

الفصل الرابع

الحلقة والحقل

١ - ٤ تمهيد : لقد درسنا في الفصل السابق من هذا الكتاب بمجموعة E عرفنا عليها عملية داخلية o وعينا الخواص التي يجب أن تتمتع بها هذه المجموعة والعملية المعرفة عليها ليمكن تسمية الزوج المرتب (E , o) زمرة . وسندرس في هذا الفصل بمجموعة E عرف عليها عمليتان (* , o) وسنعطي للثلاثية (E,o,*) اسماء مختلفة بحسب الخواص التي تتصف بها المجموعة E وكل من هاتين العمليتين وبحسب العلاقات الكائنة بينهما

٢ - ٤ الحلقة : إذا كانت المجموعة E مجهزة بعملية داخلية o تجعل من (E , o) زمرة تبديلية وإذا كانت هذه المجموعة مجهزة بعملية ثانية (*) تجميعية (قابلة للدمج) وتوزيعية على العملية الأولى (o) . فإننا نقول « إن المجموعة E حلقة بالنسبة لهاتين العمليتين » أو « إن العمليتين * و o تجهزان E ببنية الحلقة » أو « إن الثلاثية (E , o , *) حلقة » وكثيراً ما نقول إذا لم نخش أي التباس « إن E حلقة » .

ومن المتفق عليه أن نسمي العملية الأولى جمعاً ونرمز لها (+) وأن نسمي العملية الثانية ضرباً ونرمز لها باشارة الضرب العددي المعتادة كما

نرمز للعنصر المحايد لـ (+) بصفر (0) وللعنصر المحايد للضرب (إن وجد) بالوحدة (1) .

ينتج عما تقدم أنه لتكون الثلاثية (E , + , •) حلقة يجب أن نتحقق الشروط التالية التي نسميها عادة مبادىء الحلقة :

$$\forall x, y, z \in E \ : \ (x+y)+z = x+(y+z) \qquad (1)$$

$$\forall x,y \in E \ : \ x+y = y+x \qquad (2)$$

$$\forall x \in E \ , \ \exists 0 \in E \ : \ 0+x = x+0 = x \qquad (3)$$

$$\forall x \in E \ , \ \exists y \in E \ : \ x+y = y+x = 0 \qquad (4)$$

$$\forall x, y, z \in E \ : \ (x\,y)\,z = x(y\,z) \qquad (5)$$

$$\forall x, y, z \in E \ : \ \begin{cases} x(y+z) = x\,y + x\,z \\ (y+z)x = y\,x + z\,x \end{cases} \qquad (6)$$

٣ ـ ٤ **ملاحظة** : ١ ـ إننا لم نشترط في العملية الداخلية الثانية (•) المعرفة على الحلقة أن تكون تبديلية كما أننا لم نشترط أن تحوي E دعامة الحلقة عنصراً محايداً بالنسبة لهذه العملية . فإذا كانت العملية (•) تبديلية قلنا إن الحلقة (E , + , •) تبديلية وإذا كان لهذه العملية عنصر محايد في E سمينا هذه الحلقة « حلقة واحدية » .

٤ ـ ٤ **ملاحظة** (٢) : لقد اتفق أن نرمز لنظير x بالنسبة للعملية + بـ $-x$ ولنظير y بالنسبة للعملية الثانية (إن وجد) بـ y^{-1} وسيكون استناداً إلى تعريف العنصر النظير [٢٢ ـ ١] :

$$-(-x) = x \quad , \quad (y^{-1})^{-1} = y$$

٥ - ٤ أمثلة من الحلقات :

١ - لقد درسنا فى الفصل الثاني مجموعة الأعداد الصحيحة Z وعرفنا عليها عملية جمع جعلت من Z زمرة تبديلية ثم عرفنا على هذه المجموعة عملية ضرب تتصف بكونها قابلة للدمج (تجميعية) والتوزيع على الجمع كما برهنا أن هذه العملية تبديلية وتقبل العدد (1) عنصراً محايداً فالمجموعة Z إذن حلقة تبديلية واحدية .

٢ - درسنا في الفصل السابق C_n مجموعة أصناف التوافق (قياس n) وعرفنا على هـــذه المجموعة عمليتين سمينا الأولى منها جمعاً (+) وسمينا الثانية ضرباً (•) ورأينا أن العملية (+) تجعل من هذه المجموعة زمرة جمعية بينما تتصف العملية الثانية بأنها قابلة للدمج (تجميعية) وبأنها توزيعية على العملية الأولى . إذن يمكننا أن نقول إن C_n حلقة . (هل هـذه الحلقة تبديلية وواحدية ؟) .

٣ - لندرس الجـدولين التاليين الممثلين لجدولي جمع وضرب معرفين على المجموعة $E = \{e, a, b, c\}$.

+	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

×	e	a	b	c
e	e	e	e	e
a	e	a	b	c
b	e	b	e	b
c	e	c	b	a

يمكننا بسهولة أن نتأكد من الجدول الأول أن العملية (+) تبديلية وقابلة للدمج ولها عنصر محايد (e) ولكل عنصر من E عنصر نظير بالنسبة لهذه العملية :

$$e+e=e\ ,\quad a+c=c+a=e\ ,\quad b+b=e\ ,\quad c+a=a+c=e$$

كما يمكننا أن نتأكد من الجدول الثاني أن العملية (×) قابلة للدمج وأنها توزيعية على العملية (+) وهذا ما يسمح لنا بأن نقول إن لـ E بنية حلقة .

نستنتج من الجدول الثاني أن العملية (×) تبديلية وأن العنصر a هو العنصر المحايد لها لذا يمكننا أن نصف هذه الحلقة بأنها واحدية وتبديلية .

٦ - ٤ طرائق الحساب على الحلقة :

١ - لقد عرفنا على E (دعامة الحلقة) عملية داخلية أولى سميناها جمعاً ورمزنا لها بـ (+) ورأينا أن لكل عنصر a من E نظيراً بالنسبة لـ (+) نرمز له بـ (a-) وسيكون نتيجة لهذا [٣٦ - ١] أن العملية المعاكسة للجمع والتي نسميها عادة طرحاً ونرمز لها بـ (-) معرفة على E فالطرح إذن عملية داخلية معرفة على دعامة كل حلقة . وقد عرفنا أيضاً على E عملية ثانية سميناها ضرباً ورمزنا لها بالاشارات المعتادة لضرب الأعداد . وكثيراً ما نرمز لعنصر من E بناتج تكرار هذه العمليات الثلاث أو بعضها مثل :

$$[\,a\times(-b)\,]+\{\,c\times[\,c+(-e)\,]\,\}$$

إن ناتج العمليات الموجودة في كل قوس من هذه الأقواس يمثل عنصراً

من E يجب أن يعامل بحسب الاشارة التي تتبعه مع العنصر الذي يليه ، وذلك ترتيباً من اليسار إلى اليمين وقد جرت العادة أن يهمل بعض هذه الأقواس وأن نجري عمليات الضرب الداخلة في هذا التركيب قبل عمليتي الجمع والطرح . فيمكننا مثلاً أن نكتب التركيب السابق بالشكل :

$$a \times (-b) + c \times [c + (-e)]$$

٢ - بعد أن برهنا أن الطرح عملية داخلية على الحلقة $(E, +, \cdot)$ يمكننا أن نبرهن أيضاً أن الضرب توزيعي على الطرح كما هو شأنه من أجل الجمع أي أن نبرهن صحة العلاقة :

$$\forall x, y, z \in E \qquad x(y - z) = xy - xz$$

في الحقيقة بما أن الضرب توزيعي على الجمع فإنه يمكننا أن نكتب :

$$x(y - z) + xz = x(y - z + z) = xy$$

وبما أن عملية الجمع وحيدة القيمة وقابلة للاختصار :

$$x(y - z) + xz + (-xz) = xy + (-xz)$$

واستناداً إلى تعريف الطرح والعنصر النظير بالنسبة للجمع تأخذ العلاقة السابقة الشكل :

$$x(y - z) = xy - xz \qquad (1)$$

وهي العلاقة المطلوب برهانها

يبرهن بالطريقة السابقة ذاتها على صحة العلاقة .

$$(y - z)x = yx - zx \qquad (2)$$

٣ ـ إذا جعلنا في العلاقتين (2 , 1) ، $y = z$ فسنجد :

$$x . o = o = o . x$$

٤ ـ وإذا جعلنا في (2 , 1) ، $y = o$ فسيكون :

$$x(-z) = -xz \quad , \quad (-z)x = -zx$$

نفسر هذا بقولنا « إذا بدلنا أحد حدي الضرب بنظيره بالنسبة للجمع فإن الناتج الجديد سيكون نظيراً للنـــاتج القديم بالنسبة للجمع أيضاً » ونذكر عادة هذه الخاصة بالشكل . « إن تغيير إشارة واحد من حدي الضرب يؤدي الى تغيير اشارة ناتج الضرب » .

٥ ـ اذا غيرنا اشارة كل من حدي الضرب فان الناتج سيغير إشارته مرتين أي أنه سيحافظ على إشارته الأصلية :

$$(-x) . (-y) = x . y$$

نعمم ما سبق على تكرار عملية الضرب فنكتب :

$$\forall p \in N \quad : \quad (-a)^{2p} = a^{2p} \quad , \quad (-a)^{2p+1} = -a^{2p+1}$$

لقد درسنا حتى الآن الحلقة وأتينا على خواصها وأعطينا بعض الأمثلة عليها وسنقدم فيما يلي دراسة فيها بعض التفصيل لحلقتين مهمتين هما حلقة الأعداد العادية وحلقة كثيرات الحدود .

حلقة الأعداد العادية :

٧ ـ ٤ تعريف العدد العادي : إذا شكلنا الجداء $Z \times Z^*$ فإننا

سنحصل على أزواج مرتبة من الشكل (a , b) حيث $b \neq o$ ($b \in Z^*$ ، $a \in Z$) . نعطي في هذا البحث الزوج المرتب (a , b) مفهوماً مرادفاً لمفهوم الكسر العادي المعروف (a/b) ونسميه كسراً كما نسمي موركبته الأولى a صورة ومركبته الثانية b مخرجاً لهذا الكسر . ونذكر الخاصة الأساسية للكسور :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\,d = b\,c$$

بشكل علاقة معرفة على الجداء $Z \times Z^*$:

$$(a , b)\ \mathcal{R}\ (c , d) \Leftrightarrow a\,d = b\,c \qquad (1)$$

يبرهن بسهولة أن هذه العلاقة منعكسة ، متناظرة ومتعدية فهي علاقة تكافؤ ونقول عن كل كسرين (a , b) و (c , d) يحققان العلاقة (1) ، إنهما كسران متكافئان ونكتب تجاوزاً :

$$(a , b) = (c , d) .$$

تجزىء العلاقة $\mathcal{R}$ المجموعة $Z \times Z^*$ إلى أصناف تكافؤ يتكون كل صنف من مجموعة الكسور التي كنا نسميها متساوية وندعوها في هذا البحث متكافئة مثل الصنف :

$$\{ (2 , 3) , (4 , 6) , (6 , 9) , \ldots \}$$

يمثل كل صنف أحـــد كسوره ونرمز للصنف بالكسر الذي يمثله بعد أن نضع فوقه ، موقتاً ، قوساً يميزه عن هـذا الممثل فنرمز مثلاً الصنف الذي أوردناه أعلاه بـ($\widehat{2 , 3}$) ويكون :

$$(2\,,3) \in (\widehat{2\,,3}) \quad , \quad (6\,,9) \in (\widehat{2\,,3})$$

نسمي كل صنف من أصناف التكافؤ التي أتينا على تعريفها عـــدداً عادياً ونرمز لمجموعة الأعداد العادية بـ Q :

٨ - ٤ **العددان العاديان المتساويان** : إستناداً إلى خواص علاقة التكافؤ نقول « يتســاوى العددان العاديان $(\widehat{a,b})$ ، $(\widehat{c,d})$ فيما إذا انتمى ممثلاهما (a,b) ، (c,d) إلى صنف تكافؤ واحد » .

مثال : إن العددين العاديين $(\widehat{3,15})$ ، $(\widehat{7,35})$ متساويان لأن :

$$(3\,,15) \in (\widehat{1\,,5}) \quad , \quad (7\,,35) \in (\widehat{1\,,5})$$

٩ - ٤ **الخاصتان الأساسيتان للكسور** :

١ - إذا ضربنا حدي كسر بعدد صحيح واحد لايساوي الصفر فإننا نحصل على كسر يكافىء الكسر المفروض أي :

$$\forall k \in N^* \quad : \quad (a\,,b) \,\mathcal{R}\, (k\,a\,,k\,b)$$

وذلك لأنه بحسب خواص ضرب الأعــداد الصحيحة :

$$a\,k\,b = b\,k\,a$$

٢ - إذا قبل حدا الكسر $(a\,,b)$ القسمه على عدد صحيح واحد c فإنه يكون :

$$(a\,,b) \,\mathcal{R}\, \left(\frac{a}{c}\,,\frac{b}{c}\right)$$

وذلك لأنه أستناداً إلى العلاقه (١) :

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c} \Rightarrow (a, b)\ \mathcal{R}\ (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$$

برهن كتمرين صحة المساواة :

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \cdot \frac{a}{c}$$

مستنداً إلى خواص عملية ضرب الأعداد الصحيحة .

نسمي عادة تقسيم حدي كسر على عدد صحيح واحد يقسمها اختصار الكسور وإذا قسمنا حدي كسر على قاسمها المشترك الأعظم فسوف نحصل على كسر حداه أوليان فيا بينها ندعوه بكسر غير قابل للاختصار أو غير قابل للارجاع .

١٠ - ٤ **ملاحظة** : ينتج عن الخاصة الأولى أنه يمكننا أن نضرب حدي كل كسر من مجموعة كسور بعدد بحيث نحصل على مجموعة جديدة من الكسور مخارجها متساوية وتكافىء على الترتيب كسور المجموعة الأولى نسمي مثل هذا العمل توحيد مخارج الكسور .

مثال : إن الكسور $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ تكافىء على الترتيب الكسور $\frac{3}{12}$ ، $\frac{4}{12}$ ، $\frac{6}{12}$ وتكافىء أيضاً الكسور $\frac{6}{24}$ ، $\frac{8}{24}$ ، $\frac{12}{24}$.

يمكن التوصل إلى توحيد مخارج جملة من الكسور بأشكال عديدة وبصورة خاصة إن الكسرين $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ يكافئان على الترتيب الكسرين $\frac{b\,c}{b\,d}$ ، $\frac{a\,d}{b\,d}$.

١١ - ٤ **ملاحظة** : يمكننا أن نفرض دوماً أن مخرج الكسر

العادي موجب وذلك بأن نضرب ، في الحالة المخالفة ، حدي الكسر بالعدد (١ −) .

١٢ - ٤ تنبيه : لقد رمزنا للعدد العـادي بممثل له يعلوه قوس وسنحذف هـذه القوس تسهيلاً للطباعة في الحالات التي لا نخشى فيهـا أي التباس .

١٣ - ٤ **جمع الأعداد العادية** : لنترجم القاعدة المعروفة لجمع كسرين بالتعريف التالي :

$$(a\,,\,b) + (c\,,\,d) = (a\,d + b\,c\,,\,b\,d) \qquad (3)$$

ولنلاحظ أن $a\,d + b\,c \in Z$, $b\,d \in Z^*$ لأن $a\,,\,b \in Z$; $b,d \in Z^*$ ولأن كلا من المجموعتـين Z , Z^* مستقرة بالنسبة للجمـع والضرب المعرفين عليها ونستنتج من هذا أن ناتج عملية جمع كسرين كسر وأن عملية جمع الكسور هي عملية داخلية معرفة على مجموعة الكسور $Z \times Z^*$.

ولنلاحظ أيضاً أنه لو استعضنا في الطرف الأيسر من العلاقة (3) عن حدي الجمع بكسرين مكافئين لهما فسوف نحصل على ناتج للجمع يكافىء الناتج القديم . في الحقيقة :

$$(a\,,\,b)\ \mathcal{R}\ (a'\,,\,b') \iff a\,b' = b\,a'$$

$$(c\,,\,d)\ \mathcal{R}\ (c'\,,\,d') \iff c\,d' = d\,c'$$

إذا ضربنا طرفي المساواة الأولى وطرفي المساواة الثانية على الترتيب بالعددين غير المعدومين $b\,b'$, $d\,d'$ وجمعنا المساواتين الناتجتين إلى بعضهما فسوف نجـد :

$$(a\,d + b\,c)\,b'\,d' = (a'\,d' + b'\,c')\,b\,d$$

$$\Leftrightarrow (a\,d + b\,c\,,\,b\,d)\;\mathfrak{R}\;(a'\,d' + b'\,c'\,,\,b'\,d')$$

$$\Leftrightarrow [\,(a\,,\,b) + (c\,,\,d)\,]\;\mathfrak{R}\;[\,(a'\,,\,b') + (c'\,d')\,]$$

وهو المطلوب برهانه .

انطلاقاً مما سبق يمكننا أن نعطي التعريف التالي :

$$(\widehat{a\,,\,b})\;\dot{+}\;(\widehat{c\,,\,d}) = (\widehat{ad + b\,c\,,\,b\,d})$$

ونذكر ذلك بقولنا : « إن ناتج جمع عددين عاديين هو عدد عادي يمثله ناتج جمع ممثلي العددين العاديين المفروضين » .

١٤ - ٤ تنبيه : لقد مثلنا عملية جمع الأعداد العادية بـ $\dot{+}$ تمييزاً لها عن عملية جمع الكسور سنحذف بعد الآن النقطة من فوق الاشارة + ولن نضعها إلا في الحالات التي نخشى فيها التباساً .

١٥ - ٤ **خواص جمع الأعداد العادية** : يبرهن انطلاقاً من تعريف جمع الأعداد العادية على صحة الخواص التالية :

١ - جمع الأعداد العادية قابل للدمج (تجميعي) :

$$[\,(a\,,\,b) + (c\,,\,d)\,] + (e\,,\,f) = (a\,,\,b) + [\,(c\,,\,d) + (e\,,\,f)\,]$$

٢ - جمع الأعداد العادية تبديلي :

$$(a\,,\,b) + (c\,,\,d) = (c\,,\,d) + (a\,,\,b)$$

٣ - العدد العادي $(0,1) = (0,k)$ هو العنصر المحايد لهذه العملية .

٤ - إن العدد العادي $(\widehat{-a, b})$ هو العنصر النظير لـ $(\widehat{a, b})$ بالنسبة للجمع .

ينتج مما سبق أن Q ، مجموعة الأعداد العادية ، زمرة جمعية تبديلية .

١٦ - ٤ ضرب الأعداد العادية : سنترجم هنا أيضاً قاعدة ضرب الكسور المعروفة بالتعريف التالي :

$$(a, b) . (c, d) = (a c, b d) \tag{4}$$

وإذا لاحظنا أن $a c \in Z$, $b d \in Z^*$ فإن ناتج الضرب (ac, bd) كسر وإن العملية المعرفة بالعلاقة (4) عملية داخلية معرفة على مجموعة الكسور ويمكننا أن نبرهن بسهولة أن ناتج ضرب كسرين لا يتغير إذا بدلنا كلا من حديه بكسر آخر يكافئه .

استناداً إلى ما تقدم نعطي تعريف ضرب الأعداد العادية بالشكل :

$$(\widehat{a, b}) \dot{\times} (\widehat{c, d}) = (\widehat{a c, b d}) \tag{5}$$

ونذكر ذلك بقولنا « إن جداء عددين عاديين يمثلها الكسران (c, d) ، (a, b) هو عدد عادي يمثله جداء هذين الكسرين » .

١٧ - ٤ تنبيه : لقد رمزنا لعملية ضرب الأعداد العادية بإشارة ضرب الأعداد المعتادة $(\times)$ تعلوها نقطة ؛ سنحذف بعد الآن هذه النقطة لتسهيل الطباعة إلا في الحالات التي نخشى فيها التباساً .

١٧ - ٤ خواص ضرب الأعداد العادية : يمكننا انطلاقاً من العلاقة (5) أن نبرهن صحة الخواص التالية :

١ - ضرب الأعداد العادية قابل للدمج (تجميعي) :

$$[(a, b) . (c, d)] . (e, f) = (a, b) . [(c, d) . (e, f)]$$

٢ - ضرب الأعداد العادية تبديلي :

$$(a, b) . (c, d) = (c, d) . (a, b)$$

٣ - إن العدد العادي :

$$\forall k \in Z^* \quad : \quad (1, 1) = (k, k)$$

هو العنصر المحايد لهذه العملية .

إذا كان $a \neq 0$, $b \neq 0$ فإن العدد العادي (a , b) نظير العدد العادي (b , a) بالنسبة لعملية الضرب .

نسمي عادة نظير العدد العادي x بالنسبة للضرب مقلوباً لهذا العدد ونرمز له بـ x^{-1} .

إذا ضممنا هذه الخواص إلى خواص جمع الأعداد العادية فإننا نقول : « ان مجموعة الأعداد العادية Q حلقة تبديلية واحدية » .

١٨ - ٤ تمرين : برهن أن Q' المجموعة الجزئية من Q والتي يرمز لعناصرها بالشكل (a , 1) حيث $a \in Z$ ، ايزومورفية مع Z بالنسبة للعمليتين (+ ، •) المعرفتين على Z و Q .

١٩ - ٤ نتيجة : نتيجة للتمرين السابق ولما قدمناه في الفقرة [١ - ٥٥] فإنه يمكن مع شيء من التجاوز أن نكتب :

$$\forall a \in Z \quad : \quad (a, 1) = a \quad , \quad (0, 1) = (0, a) = 0$$

$$(1, 1) = (a, a) = 1$$

أو بشكل مختصر $Q' = Z$.

ونقول ان $0 = (0, k)$ هو صفر الأعداد العادية و $1 = (1,1)$ هو واحدة الأعداد العادية .

٢٠ - ٤ ليس لـ Q بنية زمرة ضربية لأنه ليس للصفر نظير بالنسبة الضرب (لماذا) .

٢١ - ٤ **طرح الأعداد العادية** : بعد أن برهنا أن Q زمرة فإننا نستنتج [٤ - ٦] أن عملية الطرح عملية داخلية معرفة على مجموعة الأعداد العادية . يرمز عادة لنظير العدد العـــادي (a , b) بـ $-(a , b)$ - واذا ذكرنا ما رأيناه في [٤ - ١٤] فإنه يكون :

$$-(a , b) = (-a , b) = (a , -b)$$

$$(a , b) - (c , d) = (a , b) + (-c , d) = (a d - b c , b d)$$

٢٢ - ٤ **الأعداد العادية الموجبة والسالبة** : لقد كتبنا تجاوزاً [٤ - ١٩] :

$$\forall a \in Z \ : \ (a , 1) = a$$

ومن المنطقي أن نقول عن العدد العـادي $(a , 1)$ انه موجب فيما اذا كان a موجباً وأن نقول عنه انه سالب فيما اذا كان a سالباً .

ومن المنطقي أيضاً أن نعمم هذا على كل عدد عادي جعل مخرجه موجباً وأن نقول : « إذا كان b موجباً فان العادي (a , b) يكون موجباً إذا كان a موجباً ويكون هذا العدد سالباً إذا كان a ســالباً » وبما أن :

$$(-a , b) = (a , -b) \quad , \quad (a , b) = (-a , -b)$$

فإننا نعطي التعريف التالي :

« يكون العدد العادي موجباً إذا كانت مركبتا ممثله من إشارة واحدة ويكون العدد العادي سالباً إذا كانت هاتان المركبتان من إشارتين مختلفتين » أي :

$$(a, b) \text{ موجب } \Leftrightarrow a . b > 0$$

$$(a, b) \text{ سالب } \Leftrightarrow a . b < 0$$

٢٣ - ٤ **علاقة الترتيب على Q** : يمكننا أن نمدد علاقة التراجح المعرفة على Z لكي تشمل Q بالتعريف التالي :

تعريف : نقول عن العدد العادي (a , b) إنه يكبر العدد العادي (c , d) فيما إذا كان ناتج الطرح :

$$(a, b) - (c, d)$$

موجباً وبصورة خاصة إذا كان a, b من إشارة واحدة أي إذا كان العدد العادي (a , b) موجباً فإنه يكون :

$$(a, b) - (0,1) = (a, b)$$

موجباً ونقول إن كل عدد موجب يكبر الصفر ونكتب ذلك بالشكل:

$$(a, b) > 0$$

أما إذا كان x و y من إشارتين مختلفتين أي إذا كان العدد العادي (x , y) سالباً ، فإنه يكون :

$$(0,1) - (x, y) = (-x, y)$$

موجباً ونقول إن الصفر يكبر كل عدد سالب ونكتب ذلك بالشكل :

$$(x, y) < 0$$

وبما أن ناتج طرح عددين عاديين عدد عادي فان هذا الناتج سيكون سالباً أو موجباً أو معدوماً وهذا يعني أن كل زوج من الأعداد العادية α, β يحقق واحدة فقط من العلاقتين :

$$\alpha \geqslant \beta \quad , \quad \alpha < \beta$$

يبرهن أن العلاقة $\leqslant$ المعرفة على Q هي علاقة ترتيب ويستنتج أن Q مرتبة كلياً بالعلاقة $\leqslant$.

٢٤ - ٤ **تقسيم الأعداد العادية** : إذا تذكرنا تعريف العمليـــة المعاكسة [٣٦ - ١] وأن لكل عدد عادي يخالف صفر هذه الأعـداد نظيراً بالنسبة للضرب ، فإنه يمكننا أن ننشيء على $Q^* = Q - \{0\}$ عملية معاكسة للضرب نسميها تقسيما ونرمز لها بـ (: أو ÷ أو —) ونعرفها بالشكل التالي :

$$(a, b) \div (c, d) = (a, b) \times (d, c) = (a d, b c)$$

وكثيراً ما نرمز لهذه العملية بالشكل :

$$(a, b) : (c, d) \qquad \text{أو} \qquad \frac{(a, b)}{(c, d)}$$

وسيكون بصورة خاصة :

$$\frac{1}{(c, d)} = (1, 1) \times (d, c) = (d, c) = (c, d)^{-1}$$

وهذا يعني أنه إذا كان x عدداً عادياً غير معدوم فإنه يكون :

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

ويمكننا استناداً إلى ما تقدم أن نكتب :

$$(a , b) = (a , 1) \times (1 , b) = (a , 1) : (b , 1)$$

$$\Leftrightarrow a \times b^{-1} = \frac{(a , 1)}{b , 1} = \frac{a}{b}$$

وبذلك نكون قد ربطنا بين الرمز الجديد للكسر (a , b) والرمز القديم a/b ويمكننا لدفع الالتباس أن نرمز للعدد العادي الذي يمثله الكسر a/b بالشكل (a/b) ونقول إن الكسر (a , b) هو حاصل قسمة العدد الصحيح a على العدد الصحيح غير المعدوم b .

بما أن التقسيم هو العملية المعاكسة للضرب على Q* وإذا تذكرنا قواعد ضرب الاشارات فإنه يمكننا أن نكتب :

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad , \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

وأن نستنتج قواعد تقسيم الاشارات المعروفة .

حلقة كثيرات الحدود ذات المتحول الواحد :

٤-٢٥ تعريف كثير حدود ذي متحول : يقصد في الرياضيات التقليديه بكثير حدود ذي متحول تابع من الشكل :

$$(1) \qquad x \rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

حيث نعتبر العوامل a_i والمتحول x أعداداً حقيقية أو مركبة .

نقول إن كثير الحدود (1) من الدرجة n ، ونسمي كل تركيب فيه من الشكل $a_h x^h$ حداً من الدرجة h عامله a_h كما نقول عن حدين إنهما متشابهان فيما إذا كانا من درجة واحدة . سنعمم في هذه الفقرة التعريف السابق بأن نستعيض عن R و C بحلقة تبديلية واحدية نرمز لها بـ K وإذا لاحظنا أن كل كثير حدود يمكن تعيينه تعييناً تاماً إذا عرفنا عوامل كل حدوده $a_0 , a_1 , \ldots , a_n$ فإننا سنرمز لكل كثير حدود بجملة من عناصر K عددها غير منته تمثل عوامل حدوده وسيكون معدوماً عامل كل حد تزيد قوته عن درجة كثير الحدود المفروض فنكتب مثلاً :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = (\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , 0 , \ldots)$$

وإذا كان $P(x)$ كثير حدود من الدرجة n فسيكون :

$$\alpha_{n+1} = 0 \; , \; \alpha_{n+2} = 0 , \ldots$$

نرمز عادة لمجموعة كثيرات الحدود ذات المتحول x المعرفة على الحلقة K بـ $K(x)$.

٢٦ - ٤ **تساوي كثيري حدود** : نقول تعريفاً إن :

$$(\alpha_0 , \alpha_1 , \alpha_2 , \ldots) = (\beta_0 , \beta_1 , \beta_2 , \ldots)$$

فيما إذا كان : $\alpha_0 = \beta_0 , \; \alpha_1 = \beta_1 , \; \alpha_2 = \beta_2 , \ldots$

أي يتساوي كثيرا حدود فيما إذا ساوى عامل كل حد من الأول عامل الحد المشابه له في الثاني .

٢٧ - ٤ جمع كثيرات الحدود : نعرف جمع كثيري حدود بالعلاقة التالية :

$$P + Q = (\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots) + (\beta_0 , \beta_1 , \ldots) = (\alpha_0 + \beta_0 , \alpha_1 + \beta_1 , \ldots)$$

بما أن :

$$\alpha_i \in K, \beta_i \in K \Rightarrow \alpha_i + \beta_i \in K$$

فإنه يكون :

$$(\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots) \in K(x) \quad , \quad (\beta_0 , \beta_1 , \ldots) \in K(x)$$

$$\Rightarrow (\alpha_0 + \beta_0 , \alpha_1 + \beta_1 , \ldots) \in K(x)$$

وهذا يعني أن عملية جمع كثيرات الحدود عملية داخلية على $K(x)$.

نستنتج من تعريف جمع كثيرات الحدود وخواص الجمع المعرف على K ، الخواص التالية :

١ - جمع كثيرات الحدود تبديلي .

٢ - جمع كثيرات الحدود قابل للدمج (تجميعي) .

٣ - إن كثير الحدود ($0, 0, 0, \ldots$) هو العنصر الحايد لهذه العملية .

(٤) إن كثير الحدود ($-b_0 , -b_1 , \ldots$) هو العنصر النظير لكثير الحدود ($b_0 , b_1 , \ldots$) بالنسبة للجمع .

إن هذه الخواص الأربع تجعل من $K(x)$ زمرة جمعية تبديلية .

٢٨ - ٤ ضرب كثيرات الحدود : إذا تذكرنا القواعد التقليدية

لضرب كثيري حدود فإنه يمكننا أن نعط التعريف التالي لهذه العملية :

$$(\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots) \times (\beta_0 , \beta_1 , \ldots) = (\rho_0 , \rho_1 , \ldots)$$

حيث :

$$\rho_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0 \quad , \quad \rho_1 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 , \ \rho_2 = \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0$$

وبصورة عامة :

$$\rho_n = \sum_{i+J=n} \alpha_i \cdot \beta_J$$

يمثل الطرف الأيمن من الدستور الأخير مجموع كل الجداءات الممكنة $\alpha_i \beta_J$ بحيث يكون $i + J = n$.

يمكننا أن نستنتج من التعريف السابق بشيء من العناء :

١ ـ ضرب كثيرات الحدود تبديلي وذلك لأن الجداء $\alpha_i \beta_J$ على K تبديلي .

٢ ـ ضرب كثيرات الحدود قابل للدمج (تجميعي) .

٣ ـ كثير الحدود من الدرجة صفر $(1 , 0 , 0 , \ldots) = \tau$ هو العنصر الحايد لهذه العملية إذ أنه مهما كان n :

$$\rho_n = \sum_{i+J=n} \alpha_i \beta_J = 1 \cdot \beta_n = \beta_n$$

٤ ـ ضرب كثيرات الحدود توزيعي على جمعها .

إن هذه الخواص بالاضافة إلى خواص جمع كثيرات الحدود تجعل من K(x) حلقة تبديلية وواحدية .

٢٩ ـ ٤ الحلقة الجزئية : إذا كانت A حلقة وكانت B مجموعة

جزئية منها فإننا نقول إن B حلقة جزئية من A فيما إذا تحقق الشرطان التاليـــان :

١ - B زمرة جزئية من A بالنسبة للعملية + .

٢ - B مستقرة بالنسبة لعملية الضرب المعرف على A أي :

$$\forall x , y \in B \quad , \quad x y \in B$$

إن الشرط الأول يستدعي أن $0 \in B$ وأن B مستقرة بالنسبة للجمع والطرح المعرفين على A ويبرهن استناداً إلى ما سبق أن $(B , + , \cdot)$ حلقـــة .

مثال : إذا عدنا إلى [١٨ - ٢ ، ٢١ - ٢] فسوف نتأكد من أن C_6 مجموعـــة أصناف التوافق (قياس 6) حلقـة بالنسبة للجمع والضرب المعرفين عليها . إن جـدولي جمع وضرب الأصناف للمجموعتين الجزئيتين من C_6 :

$$E_1 = \{ (0) , (3) \} \quad , \quad E_2 = \{ (0) , (2) , (4) \}$$

$\dot{+}$	(0)	(2)	(4)
(0)	(0)	(2)	(4)
(2)	(2)	(4)	(0)
(4)	(4)	(0)	(2)

$\times$	(0)	(2)	(4)
(0)	(0)	(0)	(0)
(2)	(0)	(4)	(2)
(4)	(0)	(2)	(4)

+	(0)	(3)
(0)	(0)	(3)
(3)	(3)	(0)

×	(0)	(3)
(0)	(0)	(0)
(3)	(0)	(3)

يبينان لنا أن كلا من المجموعتين E_1 , E_2 زمرة جمعية جزئية من C_6 وأن عملية الضرب المعرفة على C_6 مستقرة على كل من E_1 , E_2 وهـــذا ما يبرهن على أن كلا منهما حلقة جزئية من الحلقة C_6 .

تمرين : برهن أن كلا من $(E_1 , + , \cdot)$ و $(E_2 , + , \cdot)$ حلقة .

مثال : إذا عرفنا nZ المجموعة الجزئية من Z بما يلي .

$$nZ = \{ na \mid a \in Z \} \quad , \quad n \in N$$

ودرسنا عليها جمع وضرب الأعداد الصحيحة فإننا سنجد بسهولة أن $(nZ , + , \cdot)$ حلقة جزئية من Z .

٣٠ - ٤ **الجزء المثالي من حلقة** : إذا كانت A حلقـة وكانت B حلقة جزئية من A وإذا كان :

$$(1) \qquad \forall x \in B , \forall y \in A \ : \ xy \in B$$

قلنا ان B جزء مثالي من اليسار لـ A .

أما اذا كان الشرط السابق من الشكل :

$$(2) \qquad \forall x \in B , \forall y \in A \ : \ yx \in B$$

فإننا نقول ان B جزء مثالي من اليمين لـ A .

وإذا تحقق الشرطان $(1 , 2)$ ، وبصورة خاصة إذا كانت الحلقة A تبديلية

فإننا نقول إن B جزء مثالي ثنائي الجانب لـ A أو باختصار ان B جزء مثالي لـ A .

مثال ١ ـ اذا كان a عنصراً معيناً غير معدوم من الحلقة Z فإن الحلقة الجزئية I المكونة من الأعداد a . q حيث (q ∈ Z) هي جزء مثالي لـ Z وذلك لأن :

$$\forall x \in Z , \forall a q \in I \quad : \quad x a q = (x q) a \in I$$

مثال ٢ ـ لنعد الى المثال (١) من الفقرة [٢٩ ـ ٤] ولنبرهن أن الحلقة الجزئية $E_2 = \{ (0) , (2) , (4) \}$ هي جزء مثالي للحلقة C_6 .

في الحقيقة ان الجدول التالي يمثل جدول ضرب عناصر المجموعة E بعناصر المجموعة C_6 .

×	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(2)	(0)	(2)	(4)	(0)	(2)	(4)
(4)	(0)	(4)	(2)	(0)	(4)	(2)

وهو يؤكد صحة العلاقة :

$$\forall x \in C_6 , \forall \alpha \in E_2 \quad : \quad x \alpha = \alpha x \in E_2$$

٣١ ـ نظرية : اذا كانت (E , + , •) حلقة تبديلية وكان I جزءاً مثالياً منها واذا فرضنا :

$$a \in I , k \in Z , \alpha \in E$$

فإنه يكون :
$$k . a + \alpha . a \in I$$
حيث : $k a$ يساوي مجموع k مرة a .

البرهان : بما أن I زمرة جزئية جمعية فإنه يكون :
$$a \in I \Rightarrow a + a = 2 a \in I \Rightarrow a + 2 a = 3 a \in I \ldots$$
$$\Rightarrow a + (k - 1) a = k a \in I$$
وبما أن I جزء مثالي من الحلقة E فإنه يكون :
$$a \in I , \alpha \in E \Rightarrow \alpha . a \in I$$
وبما I زمرة جزئية جمعية فإنه يكون :
$$k a \in I , \alpha a \in I \Rightarrow k a + \alpha a \in I$$
وهو المطلوب برهانه .

٣٢ ـ ٤ **الحلقة التامة** : عندما درسنا خواص عملية ضرب الأعداد الصحيحة رأينا :
$$a . b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ أو } b = 0$$
أو :
$$a \neq 0 , b \neq 0 \Rightarrow a b \neq 0$$
إن هـــذه الخاصة ليست ضرورية في كل حلقة فهناك حلقات مثل حلقات أصناف التوافق تتحقق فيها العلاقة :
$$a \neq 0 , b \neq 0 \Rightarrow a b = 0$$
فلو أخذنا مثلاً أصناف التوافق (قياس 4) فسوف نجد :

$$(2) \neq (0)\ ,\ (2) \neq (0) \Rightarrow (2)\,.\,(2) = (4) = (0)$$

عندما يتحقق هذا الأمر في حلقة فإننا نقول إن b , a هما من القوامم الحقيقية للصفر .

أو بشكل مختصر نقول إنها قوامم الصفر .

إذا كانت الحلقة A تبديلية وتحوي عناصر غـــير صفرها ولا تحوي قوامم حقيقية للصفر سميناها « حلقة تامة » أو « حلقة كاملة » .

يمكننا في حلقة تامة الاختصار بالنسبة للضرب أي :

$$a \neq 0\ ,\ a\,b = a\,b' \Rightarrow b = b'$$

في الحقيقـــة :

$$a\,b = a\,b' \Rightarrow a\,(b - b') = 0$$

وبما أننا فرضنا أن $a \neq 0$ فإن :

$$b - b' = 0 \Leftrightarrow b = b'$$

٣٣ - ٤ أمثـــلة :

١ - إن مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية حلقة جمعية ضربية (P , + , •) وهي حلقة تامة .

٢ - إن حلقة كثيرات الحدود المعرفة على حلقة الأعداد الصحيحة حلقة تامة .

٣ - إن حلقة أصناف التوافق (قاس ٦) حلقة غير تامـــة وذلك لأن :

$(1) . (2) = (4) . (2)$ لا يؤدي الى $(4) = (1)$

٣٤ - ٤ **تمرين** : برهن أنه إذا كان n عدداً طبيعياً أولياً فإن الحلقة C_n حلقة تامة .

٣٥ - ٤ **الحقل** : إذا عرفنا على مجموعة ما E عمليتين داخليتين وسمينا الأولى جمعاً (+) والثانية ضربا (•) وتحقق الشرطان :

١ - $(E , + , \cdot)$ حلقة .

٢ - $E^* = E - \{0\}$ زمرة ضربية حيث 0 هو العنصر الحيادي للجمع المعرف على E ، فإننا نقول : إن E حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب أو إن عمليتي الجمع والضرب تزودان E ببنية حقل وكثيراً ما نقول ، إذا لم نخش أي التباس ، إن E حقل .

بما أن E^* زمرة ضربية فإن لها عنصراً حيادياً $e \neq 0$ ندعوه واحدة الحقل وإن لكل عنصر a من E عنصراً نظيراً فيها نرمز له بـ a^{-1} بحيث يكون :

$$a^{-1} . a = a . a^{-1} = e$$

ينتج عما سبق أن كل حقل يحوي العنصرين (1,0) على الأقل .

نسمي العنصرين $a , b \in E$ المحققين للعلاقة $ab = ba$ ، عنصرين قابلين للمبادلة وندعو مجموعة العناصر من E التي يقبل كل منها المبادلة بالنسبة للضرب مع كل عنصر من E ، مركز الحقل .

وإذا كانت عملية الضرب المعرفة على الحقل E تبديلية قلنا إن E حقل تبديلي .

أمثـــلة :

١ ـ أصناف التوافق (قياس n) المعرف على N : لقد رأينـا [٤ ـ ٥] أن لـ C_n ، مجموعة أصناف التوافق قياس n ، بنية حلقة ويبرهن أن هذه الحلقة تكون تامة إذا كان n أولياً [٣٤ ـ ٣] ويكون في هذه الحالة لهذه المجموعة بنية حقل (انظر التمرين الموافق) فلو أخذنا مثلاً مجموعة أصناف التوافق (قياس 5) .

$$C_5 = \{ (0) , (1) , (2) , (3) , (4) \}$$

فإننا نؤكد أن C_5 حلقة تامة لأنه لا يمكن أن يكون جداء صنفين من هـــذه الأصناف معدوماً إذا كان كل منها غير معدوم . ولكي نبرهن ان لهذه المجموعة بنية حقل يكفي أن نبرهن ان لكل عنصر منها عدا الصفر عنصراً نظيراً بالنسبة للضرب وهذا واقع لأن :

$$(1) . (1) = (1) \quad , \quad (2) . (3) = (6) = (1)$$

$$(3) . (2) = (6) = (1) \quad , \quad (4) . (4) = (16) = (1)$$

٢ ـ إذا عدنا إلى دراسة مجموعة الأعداد الصحيحة Z فسوف نجد أنها لا تكون حقلاً لأن Z^* ليس بزمرة ضربية وذلك لأنه لا يوجد لغـــير العددين (١ ، ١ ـ) نظير بالنسبة للضرب .

٣ ـ ان مجموعة الأعداد العادية Q حقل تبديلي وذلك لأن :

١ ـ Q زمرة جمعية تبديلية .

٢ ـ Q^* زمرة ضربية تبديلية .

٣٥ ـ ٤ **طرائق الحساب على الحقل** : بما أن الحقل E حلقة فإن طرائق

الحساب على الحلقة تسري على هذا الحقل أيضاً وينتج عن كون E^* زمرة ضربية الخواص التالية :

١ - ان لكل عنصر من E^* نظيراً وحيداً نرمز له بـ a^{-1} .

٢ - ان نظير النظير هو العنصر الأصلي $(a^{-1})^{-1} = a$.

٣ - عملية الضرب المعرفة على E قابلة للاختصار .

٤ - ان $(a . b)^{-1} = b^{-1} . a^{-1}$ وذلك لان :

(تعريف العنصر النظير) $(a . b)^{-1} . a\, b = e$

(الضرب قابل للدمج) $b^{-1} a^{-1} a . b = b^{-1} e\, b$

$= b^{-1} b = e$

٥ - في كل حقل E يجب أن يؤدي $ab = 0$ الى $a = 0$ أو $b = 0$

لأنه لو فرضنا $a\, b = 0$ و $a \neq 0$ فان لـ a مقلوباً هو a^{-1} ويكون :

(الضرب تجميعي) $a^{-1} (a\, b) = (a^{-1} a)\, b = b$

(بحسب [٦ - ٤]) $a^{-1} . 0 = 0$

اذن $a . b = 0$ يؤدي الى $b = 0$ واذا فرضنا $b \neq 0$ وأعدنا برهاناً مشابهاً لما سبق فسوف نجد أن $a = 0$ وهذا هو المطلوب برهانه .

٦ - التقسيم : في كل حقل K ، مهما كان $a \in K^*$ ومهما كان $b \in K$ فان هناك عنصراً وحيداً x يحقق العلاقة :

$$a . x + b = 0$$

في الحقيقة :

$$a x + b = 0 \Leftrightarrow a x = - b$$ (K زمرة جمعية)

$$\Leftrightarrow x = a^{-1}(-b) = -a^{-1} b$$ (a لـ مقلوب)

اذا كان الحقل تبديلياً نكتب هذا الناتج بالشكل $x = -b/a$ ونكون بذلك قد عرفنا على K^* عملية نسميها تقسيما وهي العملية المعاكسة للضرب. نسمي x/y ناتج تقسيم x على y أو النسبة بين x , y حيث x صورة هذه النسبة و y مخرجها.

يمكننا استناداً إلى خواص عملية الضرب وتعريف العملية المعاكسة له أن نكتب :

$$a/b = c/d \Leftrightarrow a b^{-1} = c d^{-1}$$

$$a d = a(b^{-1} b) d = (a b^{-1}) b d = c d^{-1} b d = b(d^{-1} d) c = b c$$

أي :

$$a/b = c/d \Rightarrow a d = b c$$

وعلى العكس إذا كان $ad = bc$ فان :

$$a/b = a b^{-1} = b^{-1} a d d^{-1} = b^{-1} b c d^{-1} = c d^{-1} = c/d$$

أي :

$$a d = b c \Rightarrow a/b = c/d$$

وبضم الاقتضاءين السابقين إلى بعضها نجد :

$$a/b = c/d \Leftrightarrow a d = b c$$

٣٦ - ٤ **الحقل الجزئي** : نقول عن مجموعة جزئية L من الحقل (K , + , .)

إنها حقل جزئي من K فيما إذا كان لها بنية حقل بالنسبة للعمليتين (+،•) المعرفتين على K .

٣٧ - ٤ نظرية : لتكون مجموعة جزئية L غير خالية من الحقل K، حقلا جزئياً منه يلزم ويكفي أن يكون :

$$(1) \qquad \forall a, b \in L \ , \quad a - b \in L \ , \quad a b \in L$$

$$(2) \qquad \forall a \in L^* \ , \quad a^{-1} \in L^*$$

البرهان : إستناداً إلى النظرية [٨ - ٣] نجد :

$$a - b = a + (-b) \in L$$

يؤدي إلى أن L زمرة جمعية جزئية من K وبما أن علاقتي الفرض (١ ، ٢) تعطيانا العلاقة :

$$\forall a \in L^* \ , \quad a^{-1} \in L \Rightarrow a a^{-1} \in L$$

واستناداً إلى [٨ - ٣] أيضاً نقول إن K^* زمرة ضربية جزئية من K وهـــذا مايبرهن على أن L حقل جزئي من الحقل (K , + , •) المفروض .

٣٨ - ٤ الجزء المثالي لحقل : نعرف الجزء المثالي لحقل بالشكل ذاته الذي عرفنا به الجزء المثالي لحلقـــة ولكن الجزء المثالي لحقل سيكون أكثر بساطة من مثيله في الحلقة وسنوضح ذلك بالنظرية التالية .

٣٩- ٤ نظرية : لكل حقل K جزأن مثاليان فقط هما {0} و K نفسه .

البرهان : إن كون {0} جزء مثالي للحقل واضح وذلك لأنه :

$$\forall a \in K \ , \quad 0 . a = a . 0 = 0$$

لنفرض إذن أن I الجزء المثالي لا يساوي {0} وهذا يعني أنه يوجد عنصر $a \neq 0$ في I ويوجد مقلوبه a^{-1} في K واستناداً إلى تعريف الجزء المثالي سيكون :

$$a^{-1} a = a a^{-1} = e \in I$$

وهذا يؤدي إلى أنه مهما كان العنصر x من K فإن :

$$e . x = x . e = x \in I$$

وهذا ما يبرهن المطلوب : $K = I$

تمارين محلولة

١٢٨ - (أ) بين وجود حلقة تحوي عنصراً واحداً فقط . هل هذه الحلقة تبديلية ؟ هل هي واحدية ؟ هل هي تامة ؟

(ب) برهن أنه إذا حوت حلقة أكثر من عنصر واحد ، فلا يمكن أن يكون لعمليتي الجمع والضرب المعرفتين عليها العنصر المحايد نفسه .

الحل : إذا حوت الحلقة عنصراً واحداً فقط ، فيلزم أن يكون هذا العنصر هو العنصر المحايد 0 لعملية الجمع ، ذلك أن الحلقة زمرة (تبديلية) بالنسبة لـ + ، وكل زمرة يجب أن تكون غير خالية لأنها تحوي العنصر المحايد على الأقل [٣-٣] .

إن البنية (٠ ، + ، {0}) حيث نعرف عمليتي الجمع والضرب وفق القاعدتين :

$$0 + 0 = 0 \qquad (1)$$

$$0 . 0 = 0 \qquad (2)$$

هي حلقة .

في الحقيقة ، إن من الواضح أن عملية الجمع داخلية وتبديلية ، كما أنها تجميعية لأن :

$(0 + 0) + 0 = 0 + 0 = 0$ (حسب (1))

$0 + (0 + 0) = 0 + 0 = 0$ (حسب (2))

ومن الواضح أيضاً أن 0 هو العنصر المحايد للعملية + ، وأن نظير

العنصر الوحيد 0 هو العنصر 0 نفسه . وبالتالي فان (+ و {0}) زمرة تبديلية بالنسبة لـ + .

أما بالنسبة لعملية الضرب . ، فمن الواضح أنها تجميعية لأن :

(حسب (2)) $0 . (0 . 0) = 0 . 0 = 0$

(حسب (2)) $(0 . 0) . 0 = 0 . 0 = 0$

كما أنها توزيعية على + ، لأننا نجد استناداً إلى (1) , (2) :

$$0 . (0 + 0) = 0 . 0 = 0 = 0 + 0 = 0 . 0 + 0 . 0$$

$$(0 + 0) . 0 = 0 . 0 = 0 = 0 + 0 = 0 . 0 + 0 . 0$$

وهكذا فان (. و + و {0}) حلقة .

ومن الواضح أن هذه الحلقة تبديلية ، كما أنها واحدية عنصرها المحايد بالنسبة للضرب (الذي يرمز له عادة بـ 1) هو 0 (أي أنه في هذه الحالة $0 = 1$) . هذا والحلقة هذه تامة لأن 0 هو دوماً حاصل ضرب عنصرين كل منهما يساوي 0 .

(ب) لنفرض الآن أن الحلقة تحوي (فضلاً عن العنصر 0) عنصراً آخر (على الأقل) a مغايراً للصفر . وسنثبت أن العنصر المحايد للضرب 1 لايمكن أن يساوي العنصر المحايد للجمع 0 .

لدينا $1 . a = a$. فاذا فرضنا أن $0 = 1$ لاستنتجنا أن $0 . a = a$ ولما كان $0 . a = 0$ فانه يتعين على المساواة $0 . a = a$ المساواة $a = 0$. وهذا غير صحيح لأننا افترضنا أن $a \neq 0$. وبالتالي فان افتراضنا $0 = 1$ خاطيء ، أي أن $1 \neq 0$.

١٢٩ - بين أن الدستور :

$$\forall x , y \in K \quad : \quad (x + y) (x - y) = x^2 - y^2$$

لا يصح في الحلقة K ، إلا إذا كانت هذه الحلقة تبديلية .

الحل : أيا كان العنصران x , y من الحلقة K ، فان :

$(x + y) (x - y) = x (x - y) + y (x - y)$ (الضرب توزيعي على الجمع)

$= x^2 - x y + y x - y^2$ (الضرب توزيعي على الطرح)

فاذا كانت الحلقة K تبديلية ، فانه أيا كان x , y من K نجد :

$$y x = x y \Rightarrow - x y + y x = 0 \Rightarrow (x + y) . (x - y) = x^2 - y^2$$

أما إذا كانت K حلقة غير تبديلية ، فهنالك عنصران (على الأقل) x , y من K بحيث $yx \neq xy$ أو $- xy + yx \neq 0$. وهذا يقتضي بصورة عامة :

$$x^2 - x y + y x - y^2 \neq x^2 - y^2$$

إذ أنه لو فرضنا العكس ، أي لو فرضنا صحة المطابقة :

$$x^2 - x y + y x - y^2 = x^2 - y^2$$

التي تكتب استناداً إلى أن (K ، +) زمرة تبديلية بالشكل :

$$x^2 - y^2 + (- x y \times y x) = x^2 - y^2$$

لاقتضت هذه المطابقة وفق [١٥ - ٣] أن :

$$- x y + y x = 0$$

وهذا خلاف الفرض .

١٣٠ - برهن أنه إذا كان x , y عنصرين قابلين للمبادلة في حلقة (• , + , K) ، وكان n عدداً صحيحاً فان :

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^m x^{n-m} y^m + \dots + C_n^n y^n \quad (1)$$

بفرض :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad , \quad 0! = 1 \qquad (2)$$

الحل سنستخدم طريقة التراجع . نلاحظ أولاً أن الدستور (1) صحيح بفرض n = 1 ، ذلك أن :

$$x + y = C_1^0 x + C_1^1 y$$

لنفرض الآن الدستور (1) صحيح من أجل العدد الصحيح الموجب n ، ولنثبت صحته من أجل العدد n + 1 . نلاحظ أن :

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^m x^{n-m} y^m + \dots + C_n^n y^n$$

$$\Rightarrow (x+y)^n (x+y) = C_n^0 x^n + (C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^m x^{n-m} y^m + \dots + C_n^n y^n)(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)^{n+1} = C_n^0 x^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) x^n y + \dots + (C_n^{m-1} + C_n^m) x^{n+1-m} y^m + \dots + C_n^n y^{n+1} \qquad (3)$$

لأن x , y قابلان للمبادلة (بالنسبة للضرب) ، ولأن عملية الجمع تجميعية وتبديلية ، ولأن الضرب توزيعي على الجمع .

وإذا لاحظنا صحة مايلي ، مهما كان العددان الصحيحان الموجبان n , m :

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m \ , \ C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0 \ , \ C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$$

فانه يمكن كتابة (3) على الشكل :

$$(x+y)^{n+1} = C_{n+1}^0 \ x^{n+1} + C_{n+1}^1 \ x^n y + \dots + C_{n+1}^m \ x^{n+1-m} \ y^m +$$

$$+ \dots + C_{n+1}^{n+1} y^{n+1}$$

وهكذا فإننا نجد أن الدستور (1) صحيح مهما كان العدد الصحيح الموجب n .

۱۳۱ - نقول عن العنصر x من الحلقة (K , + , •) إنه معدوم القوة (Nilpotent) إذا وجـد عدد صحيح $n > 0$ بحيث يكون $x^n = 0$. برهن أنه إذا افترضنا x , y عنصرين قابلين للمبادلة في K وأن كلا منها معدوم القوة ، كان كل من $x + y$ و xy معدوم القوة كذلك .

الحل : لما كان كل من x , y معدوم القوة ، فهنالك عددان صحيحان موجبان (مختلفان أو متساويان) n , m بحيث يكون :

$$x^n = 0 \quad , \quad y^m = 0 \qquad (1)$$

إن $(xy)^n$ تعني ضرب العنصر xy بنفسه $n - 1$ مرة . ولما كانت عملية الضرب تجميعية (وفق تعريف الحلقـة) ، وكان x , y قابلين للمبادلة ، فان :

$$(x\,y)^n = (x\,y)\,(x\,y)\dots(x\,y) = (x\dots x)\,(y\dots y) = x^n\,y^n = 0\,y^n = 0$$

وبالتالي فان xy معدوم القوة (لو رفعنا xy إلى القوة m لحصلنا على النتيجة نفسها) .

ولدينا من جهة أخرى (راجع التمرين ١٣٠) :

$$(x + y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^{k} x^{n+m-k} y^{k} \qquad (2)$$

ولكن كل حد من حدود هذا المجموع يساوي الصفر ، ذلك أنه في حدود (2) ، حيث $0 \leqslant k \leqslant m$ يكون :

$$x^{n+m-k} = x^{n} . x^{m-k} = 0 . x^{m-k} = 0 , \qquad \text{(وفق (1))}$$

كما انه في حدود (2) حيث $m < k \leqslant n + m$ يكون :

$$y^{k} = y^{k-m} y^{m} = y^{k-m} 0 = 0 \qquad \text{(وفق (1))}$$

وإذا لاحظنا أن C_{n+m}^{k} عدد طبيعي دوماً فاننا نستنتج أن الطرف الأيمن من (2) هو مجموع أصفار عددها :

$$C_{n+m}^{0} + C_{n+m}^{1} + \dots + C_{n+m}^{n+m} \qquad (3)$$

وبالتالي فان $x + y$ معدوم القوة .

ملاحظة : برهن أن المجموع (3) يساوي 2^{n+m} .

١٣٢ - تسمى كل حلقة K يتحقق فيها الشرط :

$$\forall x \in K \;:\; x^{2} = x \qquad (1)$$

حلقة بول نسبة إلى العالم الانجليزي جورج بول George Boole، (١٨١٥ - ١٨٦٤) .

(أ) بين أن الحلقة K تبديلية .

(ب) تحقق من أن :

$$\forall\, x\, y \in K \;:\; x + x = 0 \,,\; x\, y\, (x + y) = 0$$

الحل : (أ) سنبرهن الآن أن :

$$\forall\, x , y \in K \;:\; x\, y = y\, x$$

(١) إن هذه المساواة صحيحة إذا كان أحد العنصرين x أو y أو كلاهما صفراً .

(٢) إن هذه المساواة صحيحة إذا كان كل من x , y مغايراً للصفر بينما $xy = 0$ ، لأنه عندئذ يكون $yx = 0$ أيضاً لأن :

$$y\, x = (y\, x)^2 = (y\, (x\, y)\,)\, x = (y\, 0)\, x = 0\, x = 0$$

(٣) لنفرض الآن أن كلا من x , y مغاير للصفر ، وأن الحلقة K تامة . عندئذ يكون :

$$x^2 = x \quad , \quad y^2 = y \quad , \quad (x\, y)^2 = x\, y$$

$\Rightarrow (x\, y)^2 = x^2\, y^2 \;\Rightarrow\; (x\, y)^2 - (x^2\, y^2) = 0$

$\Rightarrow x\, (\, (y\, x)\, y\,) - x\, (\, (x\, y)\, y\,) = 0$ (عملية الضرب تجميعية)

$\Rightarrow x\, (\, (y\, x)\, y - (x\, y)\, y) = 0$ (الضرب توزيعي على الطرح)

$\Rightarrow (y\, x)\, y - (x\, y)\, y = 0$ ($x \neq 0$ والحلقة تامة)

$\Rightarrow (y\, x - x\, y)\, y = 0$ (الضرب توزيعي على الطرح)

$\Rightarrow y\, x - x\, y = 0$ ($y \neq 0$ والحلقة تامة)

(المطلوب) $\Rightarrow \; y\,x = x\,y$

ملاحظة : هل نكون قد استكملنا البرهان على (أ) من (١)ً – (٣)ً أم أن هنالك تتمة ، ولماذا ؟

(ب) لدينا مهما كان x من K :

(وفق (1)) $(x + x)^2 = x + x$

(من تعريف القوة) $\Rightarrow \; (x + x)(x + x) = x + x$

(الضرب توزيعي على الجمع) $\Rightarrow \; (x + x)\,x + (x + x)\,x = x + x$

(» » » ») $\Rightarrow \; x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x$

(وفق (1) والعملية + تجميعية) $\Rightarrow \; (x + x) + (x + x) = x + x$

(عناصر الزمرة (K ، +) منتظمة) $\Rightarrow \; x + x = 0$

نستنتج من هذه المساواة أنه أيا كان x , y من K فان :

$x\,y + x\,y = 0$

(حسب (1)) $\Rightarrow \; (x\,x)\,y + x\,(y\,y) = 0$

(K تبديلية والضرب تجميعي في K) $\Rightarrow \; (x\,y)\,x + (x\,y)\,y$

(الضرب توزيعي على الجمع في K) $\Rightarrow \; x\,y\,(x + y) = 0$

١٣٣ - لنعين على حلقة غير تبديلية (K ، + ، •) عملية داخلية ⊥ معرفة بالدستور :

$$\forall x, y \in K \; : \; x \perp y = x\,y - y\,x$$

[حيث نرمز كالعادة بـ $x\,y - yx$ لـ $x\,y + (-y\,x)$]

(أ) قارن بين $y \perp x$ و $x \perp y$.

(ب) بين أن العملية $\perp$ توزيعية بالنسبة للعملية + .

(حـ) برهن صحة العلاقتين التاليتين أيا كان x, y, z من K :

$$x \perp (y \perp z) + y \perp (z \perp x) + z \perp (x \perp y) = 0 \quad (1)$$

$$y \perp (x \perp z) = x \perp (y \perp z) - (x \perp y) \perp z \quad (2)$$

الحل : (أ) نلاحظ أنه مهما كان x, y من K فان :

$$(x \perp y) + (y \perp x) = (x\,y - y\,x) + (y\,x - x\,y) =$$

$$= (x\,y - x\,y) + (y\,x - y\,x) = 0 + 0 = 0 .$$

وبما أن + عملية تبديلية فرضاً (لأن (K ، +) زمرة تبديلية) ، فان $(x \perp y) + (y \perp x) = 0$ كذلك . وهكذا نكون قد وجدنا أن :

$$\forall x, y \in K \ : \ (x \perp y) + (y \perp x) = (y \perp x) + (x \perp y) = 0 \quad (3)$$

وهذا يعني أن العنصرين $x \perp y$ و $y \perp x$ متناظران بالنسبة للعملية + .

(ب) من الواضح أنه مهما كانت العناصر x, y, z من K فان :

$x \perp (y + z) = x\,(y + z) - (y + z)\,x$ (تعريفـــاً)

$= x\,y + x\,z - (y\,x + z\,x)$ (الضرب توزيعي على الجمع)

$= x\,y + x\,z - y\,x - z\,x$ ([١٧ - ٣])

$= (x\,y - y\,x) + (x\,z - z\,x)$ (العملية + تبديلية وتجميعية)

$= (x \perp y) + (x \perp z)$

ونبرهن بصورة مماثلة أن :

$$(y + z) \perp x = (y \perp x) + (z \perp x) .$$

(ح) لدينـــا :

$$x \perp (y \perp z) = x (y \perp z) - (y \perp z) x = x (y z - z y) - (y z - z y) x =$$
$$= x y z - x z y - y z x + z y x$$

(لماذا ؟)

ونجد بالتبديل الدوري لـ x , y , z أن :

$$y \perp (z \perp x) = y z x - y x z - z x y + x z y$$
$$z \perp (x \perp y) = z x y - z y x - x y z + y x z$$

ونجد بعد الجمع وملاحظة أن + عملية تجميعية وتبديلية على K أن :

$$x \perp (y \top z) + y \perp (z \top x) + z \perp (x \perp y) = (x y z - x y z) +$$
$$+ (y z x - y z x) + (z x y - z x y) + (x z y - x z y) + (x y z - y x z) +$$
$$+ (z y x - z y x) = 0 + \dots + 0 = 0 \qquad (4)$$

ولاثبات (2) نلاحظ أولاً أن :

$$x \perp (-y) = x (-y) - ((-y) x)$$
$$= -(x y) + y x$$
$$= -(x y - y x) \qquad ([٣ - ١٧])$$
$$= -(x \perp y) \qquad (5)$$

وعلى هذا الأساس فان :

$$y \perp (x \perp z) = y \perp (-(z \perp x)) \qquad (\text{وفق } (3))$$
$$= -(y \perp (z \perp x)) \qquad (6) \qquad (\text{وفق } (5))$$

كذلك فان :

$$-(x \perp y) \perp z = z \perp (x \perp y) \qquad (7) \qquad (\text{وفق } (3))$$

وبتعويض (6) و (7) في (2) نجد :

$$-(y \perp (z \perp x)) = x \perp (y \perp z) + z \perp (x \perp y)$$

وباضافة العنصر $y \perp (z \perp x)$ إلى طرفي المساواة (1) التي برهنا على صحتها . وبالتالي فان المساواة (2) صحيحة .

١٣٤ ـ لنعين على مجموعة أزواج الأعداد الصحيحة Z^2 عمليتين داخليتين + و × وفق القاعدتين :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (a a', b b' + a b' + b a')$$

برهن أن (Z^2، + و ×) حلقة تبديلية . ثم بين ماإذا كانت الحلقة هذه واحدية أو تامة .

الحل : من الواضح أن عملية الجمع على Z^2 تجميعية وتبديلية لأن عملية الجمع على Z تجميعية وتبديلية . وفي الحقيقة فان :

$$((a, b) + (a', b')) + (a'', b'') = (a + a', b + b') + (a'', b'')$$

$$= ((a + a') + a'', (b + b') + b'') = (a + (a' + a''), b + (b' + b''))$$

$$= (a, b) + (a' + a'', b' + b'') = (a, b) + ((a', b') + (a'', b''))$$

كما أن :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') = (a' + a, b' + b)$$
$$= (a', b') + (a, b).$$

وبالاضافة إلى ذلك ، فان العنصر $(0, 0)$ محايد لعملية الجمع على Z^2 لأنه مهما كان a, b من Z فان :

$$(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

كذلك ، فان لكل عنصر (a, b) نظيراً بالنسبة لعملية الجمع على Z^2 هو $(-a, -b)$ ، ذلك أن :

$$(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$$

وهكذا فان Z^2 **زمرة تبديلية** بالنسبة للعملية + .

لننتقل الآن إلى العملية الداخلية × على Z^2 . إن هذه العملية **تجميعية** ، وذلك أنه مهما كانت العناصر (a'', b'') و (a', b') و (a, b) من Z^2 فان :

$$((a, b) \times (a', b')) \times (a'', b'') = (a a', b b' + a b' + b a') \times$$
$$\times (a'', b'') = ((a a') a'', (b b' + a b' + b a') b'' + (a a') b'' +$$
$$+ (b b' + a b' + b a') a''), \qquad (1)$$

$$(a, b) \times ((a', b') \times (a'', b'')) = (a, b) \times (a' a'', b' b'' +$$
$$+ a' b'' + b' a'') = (a (a' a''), b (b' b'' + a' b'' + b' a'') +$$
$$+ a (b' b'' + a' b'' + b' a'') + b (a' a'')) \qquad (2)$$

ومن السهل التحقق من أن الزوجين المرتبين الواردين في الطرفين الأيمنين من (1) و (2) متساويان وذلك باستخدام الخواص التجميعية والتبديلية لعملية جمع الأعداد الصحيحة ، والخاصة التجميعية لعملية

ضرب الأعداد الصحيحة ، والخاصة التوزيعية لضرب الأعداد الصحيحة على جمع هذه الأعداد

كذلك فان العملية × توزيعية على عملية الجمع على Z^2 ، ذلك أن :

$$(a , b) \times ((a' , b') + (a'' , b'')) = (a , b) \times (a' + a'' , b' + b'') =$$

$$= (a (a' + a'') , b (b' + b'') + a (b' + b'') + b (a' + a'')) =$$

$$= (a a' + a a'' , b b' + a b' + b a' + b b'' + a b'' + b a'') =$$

$$= (a a' , b b' + a b' + b a') + (a a'' , b b'' + a b'' + b a'') =$$

$$= (a , b) \times (a' , b') + (a , b) \times (a'' , b'')$$

وهذه المساواة تعني أن العملية × توزيعية من اليسار على + . ونجد بصورة مماثلة أن العملية × توزيعية على + من اليمين أيضاً . لذا فان العملية × توزيعية على + .

نستخلص مما وجدناه أن (Z^2 و +) زمرة تبديلية ، وأن العملية × تجميعية على Z^2 ، وأن × توزيعية على + . وهذا يعني أن (× و + و Z^2) حلقة .

ولما كان فضلاً عن ذلك :

$$(a , b) \times (a' , b') = (a a' , b b' + a b' + b a') =$$

$$= (a' a , b' b + a' b + b' a) = (a' , b') \times (a , b)$$

فان هذه الحلقة تبديلية :

وكي تكون الحلقة واحـــدية ، يلزم ويكفي وجود عنصر معين (x , y) من Z^2 بحيث تتحقق المساواة التالية أيا كان a , b من Z :

$$(a, b) \times (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (a x, b y + a y + b x) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow a x = a , b y + a y + b x = b \Rightarrow x = 1 , y = 0$$

وبالتالي فان (1 , 0) من Z^2 عنصر محايد للعملية × ، أي أن الحلقة K واحدية .

لنبحث أخيراً فيما إذا كانت الحلقة K تامـــة . لنفرض (x , y) و (u , v) عنصرين من Z^2 يحققان العلاقة :

$$(x, y) \times (u, v) = (0 , 0)$$

نلاحظ أن :

$$(x, y) \times (u, v) = (0, 0) \Leftrightarrow (x u, y v + x v + y u) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x u = 0 , y v + x v + y u = 0$$

نستنتج من هذا أنه إذا كان $x = 0, u = -v$ و y , v أي عـــددين صحيحين ، فان علاقتي التساوي الأخيرتين تكونان محققتين . وعلى سبيل المثـال فان :

$$(0 , 1) (2 , -2) = (0 , 0)$$

وبالتـــالي فان الحلقة K غير تامة ، لأنها تحتوي على عناصر مغايرة الصفر (0,0) حاصل ضربها يســـاوي الصفر ، أي أنهـا تحتوي على قواسم للصفر .

١٣٥ - (أ) إذا قبلنا أن مجموعة الأعداد الحقيقية R تشـكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب ، فبرهن أن مجموعة الأعداد الحقيقية : $E = \{ m + n\sqrt{3} \mid m , n \in Z \}$ هي حلقة جزئية من الحلقة (R ، + ، •) .

(ب) برهن أن المجموعة الجزئية I من E حيث m , n أعداد صحيحة زوجية هي جزء مثالي من الحلقة E .

الحل : (١) إن $(E ,+)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(R ,+)$، ذلك أن من الواضح كون $E \neq \Phi$، وأنه أيا كان العنصران $m + n\sqrt{3}$ ، $m_1 + n_1\sqrt{3}$ من E فان مجموع أحدهما $m + n\sqrt{3}$ مع نظير الآخر بالنسبة للجمع $-m_1 - n_1\sqrt{3}$ هو العدد $(m - m_1) + (n - n_1)\sqrt{3}$ وهو ينتمي إلى E كذلك ، لذا فان $(E ,+)$ زمرة جزئية من $(R ,+)$.

(٢) بقي علينا إثبات أن E مغلقة بالنسبة لعملية الضرب . إن هذا يسهل التحقق منه ، لأن :

$$m + n\sqrt{3} , m_1 + n_1\sqrt{3} \in E \Rightarrow (m + n\sqrt{3})(m_1 + n_1\sqrt{3})$$

$$= m m_1 + 3 n n_1 + (n m_1 + m n_1)\sqrt{3} \in E$$

(ب) نترك للقارىء التحقق بالطريقة نفسها التي اتبعناها في (أ) ، من أن I هي زمرة جزئية من الزمرة $(E ,+)$. بقي علينا إثبات أن :

$$\forall i \in I , \forall a \in E \ : \ a i , i a \in I$$

وهذا ليس بالأمر العسير ، لأن أيا كان العنصر $a = m + n\sqrt{3} \in E$ والعنصر $i = 2 m_1 + 2 n_1\sqrt{3} \in I$ $(m , n , m_1 , n_1 \in Z)$ فان :

$$(2 m_1 + 2 n_1\sqrt{3})(m + n\sqrt{3}) = (m + n\sqrt{3})(2 m_1 + 2 n_1\sqrt{3}) =$$

$$= 2 (m_1 m + 3 n_1 n) + 2 (n_1 m + m_1 n)\sqrt{3} \in I .$$

١٣٦ - ليكن a عنصراً اختيارياً من الحلقة التبديلية $(K ,+ ,\cdot)$

ولتكن :

$$I = \{ a . k \mid k \in K \}$$

برهن أن I جزء مثالي من K .

الحل : إن المجموعة I غير خالية كما أن مجموع أي عنصر a . k من I مع نظير أي عنصر آخر a . k′ يساوي :

(الضرب توزيعي على الطرح) $a . k - (a . k') = a . (k - k')$

ولما كانت (K ، +) زمرة فرضاً فان k − k′ عنصر من K ، وبالتالي فان a . (k − k′) ∈ I وهذا يعني أن I زمرة جزئية من الزمرة (K ، +) [٣-٣٣] .

ومن جهة أخرى ، فأيا كان العنصر a . k من I والعنصر k′ من K ، فان :

$$(a . k) . k' = a . (k . k') \qquad (1)$$

لأن عملية الضرب تجميعية .

ولما كانت K ، مغلقة بالنسبة لعملية الضرب فرضاً (لأن الضرب عملية داخلية على K) ، فان k . k′ عنصر من K ، وبالتالي فان (a . k) . k عنصر من I .

كذلك ، لما كانت عملية الضرب تجميعية في كل حلقة ، وتبديلية هنا ، لأن حلقتنا تبديلية فرضاً ، فان :

$$k' . (a . k) = (k' . a) . k = (a . k') . k = a (k' . k) \qquad (2)$$

وباجراء مناقشة مماثلة تماماً لتلك التي قمنا بها قبل قليل ، نجد أن العنصر $(a . k) . k'$ عنصر من I أيضاً .

وهكذا نكون قد برهنا أن I زمرة جزئية من الزمرة $(K , +)$ وأن (1) و (2) محققان ، وهذا كاف للحكم بأن I هي جزء مثالي من الحلقة K (لماذا ؟) .

* **١٣٧** - لتكن $\triangle$, ∇ عمليتين معرفتين على Z بالقاعدتين التاليتين :

$$a \triangle b = a + b - 1 \quad , \quad a \nabla b = a + b - a b$$

(أ) أثبت أن $(Z , \triangle , \nabla)$ حلقة تامة .

(ب) هل تشكل هذه الحلقة حقلاً ؟

الحل : (أ) نلاحظ بسهولة أن :

(١) $\triangle$ عملية داخلية ، ذلك أن ناتج هذه العملية على أي عنصرين a , b من Z هو عنصر من Z أيضاً .

(٢) $\triangle$ عملية تجميعية ، ذلك أنه أيا كانت الأعداد الصحيحة a , b , c فان :

$$(a \triangle b) \triangle c = (a + b - 1) \triangle c = (a + b - 1) + c - 1 = a + b + c - 2$$

$$a \triangle (b \triangle c) = a \triangle (b + c - 1) = a + b + c - 1 - 1 = a + b + c - 2$$

(٣) $\triangle$ عملية تبديلية لأنه أيا كان العددان الصحيحان a , b فان :

$$a \triangle b = a + b - 1 = b + a - 1 = b \triangle a$$

(٤) إن الشرط اللازم والكافي لوجود عنصر محايد e لـ $\triangle$ هو

أن تتحقق المساواة أيا كان a من Z :(*)

$$a \triangle e = a \Leftrightarrow a + e - 1 = a \Leftrightarrow e = 1$$

وبالتالي فان الواحد عنصر محايد لـ △ .

(٥) لكل عنصر a من Z نظير بالنسبة لـ △ هو $2 - a$ ، الأمر الذي نترك التحقق منه للقارىء .

لذا فان Z زمرة تبديلية بالنسبة لـ △ عنصرها المحايد 1 .

(٦) ▽ عملية داخلية على Z .

(٧) ▽ عملية تجميعية على Z .

(٨) ▽ عملية توزيعية بالنسبة لـ △ ، ذلك أنه أيا كان a , b , c من Z فان :

$$a \triangledown (b \triangle c) = a \triangledown (b + c - 1) = a + (b + c - 1) - a\,(b + c - 1) =$$

$$= 2a + b + c - ab - ac - 1 = (a + b - ab) + (a + c - ac) - 1$$

$$= (a \triangledown b) + (a \triangledown c) - 1 = (a \triangledown b) \triangle (a \triangledown c)$$

إن هذا يعني بأن ▽ عملية توزيعية من اليسار على △ . ولما كانت ▽ عملية تبديلية ، فان ▽ عملية توزيعية من اليمين كذلك على △ .

إن الشروط (١) - (٨) تعني أن Z حلقة بالنسبة للعمليتين الداخليتين ▽ , △ . (تلعب هنا △ دور عملية الجمع ، ▽ دور عملية الضرب) .

هذا ، ولما كان :

(*) كفاية الشرط ناتجة عن كون العملية △ تبديلية .

$$a \bigtriangledown b = 1 \Leftrightarrow a + b - ab = 1 \Leftrightarrow a(1-b) = 1 - b$$
$$\Rightarrow a = 1 \quad \text{أو} \quad b = 1$$

فإننا نرى أن Z حلقة تامـــة بالنسبة لـ $\bigtriangledown , \bigtriangleup$ (الواحـد هنا يلعب دور الصفر في تعريف الحلقة [٢ - ٤] ، لأن $\bigtriangleup$ تلعب دور العملية + في التعريف والواحد عنصر محايد لـ $\bigtriangleup$) .

(ب) بعد أن برهنا أن Z زمرة تبديلية بالنسبة للعملية $\bigtriangleup$ ، فان ($Z, \bigtriangleup, \bigtriangledown$) تكون حقلاً إذا كانت $Z - \{1\}$ زمرة تبديلية بالنسبة للعملية الداخلية $\bigtriangledown$ (التي تلعب هنا دور عملية الضرب في التعريف) . إلا أن $Z-\{1\}$ ليست زمرة بالنسبة لـ $\bigtriangledown$ رغم أنه يمكن التحقق من أن $\bigtriangledown$ عملية داخلية على $Z - \{1\}$ ، وأن هذه العملية الداخلية تجميعية وتبديلية ، وأن 0 عنصر محايد للعملية $\bigtriangledown$ في $Z - \{1\}$. والسبب في ذلك هو أن ليس لكل عنصر من $Z - \{1\}$ نظير في هذه المجموعة بالنسبة لـ $\bigtriangledown$. وعلى سبيل المثال فليس للعدد (3) نظير بالنسبة لـ $\bigtriangledown$ إذ لو افترضنا جدلاً x نظيراً له لكان :

$$x \bigtriangledown 3 = 0 \Leftrightarrow x + 3 - 3x = 0 \Leftrightarrow 3 = 2x$$

ومن الواضح خطأ هذه المساواة في Z لأنها تعني مساواة بين عـدد فردي وعدد زوجي .

١٣٨ - (أ) لتكن $\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in Q \}$ = ؟ (أ) برهن أن S حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية بالنسبة للعمليتين ألوفتين لجمع وضرب الأعداد الحقيقية) .

(ب) برهن أن التطبيق $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$ أوتومور زم لـ S .

الحل : (أ) أيا كان العنصران $a + b\sqrt{5}$, $a' + b'\sqrt{5}$ ـ المجموعة غير الخالية S ، فان :

$$(a + b\sqrt{5}) - (a' + b'\sqrt{5}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{5} \qquad (1)$$

ولما كان $b - b'$, $a - a'$ عنصرين من Q ، فان حاصل الطرح هذا عنصر من S . إذن S زمرة جزئية من R [٣٣ - ٣] .

بقي علينا فقط (لماذا ؟) إثبات أنه إذا كان العنصر $a + b\sqrt{5}$ منتمياً إلى $S^* = S - \{0\}$ ، فان مقلوبه ينتمي إلى S^* أيضاً .

وفي الحقيقة فان :

$$a + b\sqrt{5} \neq 0 \Rightarrow a - b\sqrt{5} \neq 0 \qquad (2)$$

ذلك أنـــه لو كان $a - b\sqrt{5} = 0$ ، لتعين على ذلك $a = b = 0$ ، لأن من الواضح بأن : $a = 0 \Rightarrow b = 0$ ، $b = 0 \Rightarrow a = 0$ ، $a \neq 0 , b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{5}$ ولكن هذه المساواة غير صحيحة لأنها تعني أن هنالك عـدداً عاديا $\left(\frac{a}{b}\right)$ مربعه يساوي 5 ، وهذا غير صحيح كما نعلم .

نستنتج من (2) أن $a + b\sqrt{5} \neq 0$ تكافىء كون :

$$(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 \qquad (3)$$

مغايراً للصفر . وتبين المساواة (3) أن مقلوب $a + b\sqrt{5}$ هو :

$$\frac{a}{a^2 - 5b^2} - \frac{b}{a^2 - 5b^2}\sqrt{5}$$

ومن الواضح أن هذا العدد ينتمي إلى S^* .

(ب) من الواضح أن :

$$f[(a+b\sqrt{5})+(a'+b'\sqrt{5})]=f[(a+a')+(b+b')\sqrt{5}]$$
$$=a+a'-(b+b')\sqrt{5}=(a-b\sqrt{5})+(a'-b'\sqrt{5})$$
$$=f(a+b\sqrt{5})+f(a'+b'\sqrt{5}).$$

كذلك فإن :

$$f[(a+b\sqrt{5})(a'+b'\sqrt{5})]=f[(aa'+5bb')+(ab'+ba')\sqrt{5}]=$$
$$=aa'+5bb'-(ab'+ba')\sqrt{5}=(a-b\sqrt{5})(a'-b'\sqrt{5})=$$
$$=f(a+b\sqrt{5})\,f(a'+b'\sqrt{5}).$$

وإذا أضفنا إلى هـذا أن f تطبيق متباين وغامر لـ S على نفسها (لماذا ؟) ، فإننا نتحقق من أن $f: S \to S$ أوتومورفيزم لـ S .

١٣٩ - لتكن (K ، + ، .) حلقة تبديلية وتامة . برهن أنه إذا لم تحو هذه الحلقة أجزاء مثالية خلا الجزأين المثاليين K و {0} ، غدت الحلقة (K ، + ، .) حقلاً .

الحل : إذا كانت الحلقة تامة ، فإن جداء أي عنصرين مغايرين للصفر هو عنصر مغاير للصفر ، وبالتالي فإن المجموعة $K^* = K - \{0\}$ مغلقة بالنسبة للضرب .

كذلك ، فإن أياً كان العنصر a من K ، فإن : $a . K = \{a . k \mid k \in K\}$ هي جزء مثالي من الحلقة K (راجع التمرين ١٣٧) . فإذا فرضنا أن [illegible] ، [illegible] الجزء المثالي الصفري {0} . أما لو كان $a \neq 0$ فإنه لا يمكن أن يكون $a . K$ هو الجزء المثالي الصفري ، لأنه لو فرضنا [illegible] $a . k = 0$ ، أي تحوي الحلقة K قواسم الصفر [illegible] الحلقة [illegible] تامة ، وهذا خلاف الفرض .

ولما كانت الحلقة لا تحوي إلا الجزأين $\{0\}$, K ، فاننا نستنتج من هذه المناقشة أنه إذا كان $a \neq 0$ ، فان $a.K = K$. وبالتالي فان المعادلة :

$$a\,x = b$$

حلاً في K أيا كان $a \neq 0$ وأيا كان b من K . إن هذا الحل وحيد ، ذلك أنه لو وجد حل آخر x_1 لكان :

$$a\,x = a\,x_1 \Leftrightarrow a\,x - a\,x_1 = 0 \Leftrightarrow a\,(x - x_1) = 0$$

ولما كانت الحلقة تامـــة ، وكان $a \neq 0$ فيجب أن يكون : $x - x_1 = 0$ أي $x = x_1$.

نلاحظ الآن أن للمعادلة $ax = a$ ، أيا كان a المغاير للصفر من K ، الحل نفسه . ذلك أنه لو افترضنا وجود عنصرين مغايرين للصفر a , b من K بحيث يكون :

$$a\,x_1 = a \quad , \quad b\,x_2 = b$$

فان $(a\,x_1)\,b = a\,(b\,x_2)$. ولما كانت عملية الضرب تجميعية وتبديلية فان هذه المساواة تكتب على الشكل $(a\,b)\,x_1 = (a\,b)\,x_2$ أو $(a\,b)\,x_1 - (a\,b)\,x_2 = 0$ أو $a\,b\,(x_1 - x_2) = 0$. ولما كان $ab \neq 0$ (لأن K^* مغلقة بالنسبة للضرب) ، وكانت الحلقة K تامة ، فان $x_1 - x_2 = 0$ أي $x_1 = x_2$.

سنرمز للعنصر (الوحيد) الذي يحقق المعادلات $xa = a$ (أيا كان a المغاير للصفر) بـ 1 .

ولما كانت الحلقة K تبديلية ، فاننا نستنتج من هذا أن :

$$\forall\, a \in K^* \; : \; a \, . \, 1 = 1 \, . \, a = a$$

وأخيراً نلاحظ أنه أيا كان العنصر $a \neq 0$ من K ، فله نظير في K^* لأن للمعادلة :

$$a\,x = 1$$

حلا وحيداً كما رأينـــا قبل قليل ، (ولأن العملية تبديلية) ، ومن الواضح هنا أن $x \neq 0$.

وبالنتيجة نكون قد وجدنا أن K^* مغلقة بالنسبة للضرب ، وأن عملية الضرب تجميعية على K^* (لأنها تجميعية على K) ، وأن عمليـة الضرب تبديلية على K^* (لأن K حلقة تبديلية فرضاً) ، وأن لعملية الضرب على K^* عنصراً محايداً رمزنا له بـ 1 ، وأن لكل عنصر من K^* نظيراً في K^* .

لذا ، فان (K^* و $\cdot$) زمرة تبديلية ، وبالتالي فان ($\cdot$ و + و K) حقل وهو المطلوب .

تمارين غير محلولة

١٤٠ - إذا كان $(A, +, .)$ حلقة برهن أن مجموعة العناصر القابلة للتبديل مع عنصر معين a بالنسبة للعملية الثانية تكون حلقة جزئية من A وأن مجموعة عناصر A القابلة للمبادلة مع أي عنصر من A هي حلقة جزئية .

١٤١ - نعرف على مجموعة الجداء Z^2 عمليتين داخليتين بالشكل :

$$(a, b) + (a' + b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) . (a', b') = (a a' - b b', a b' + b a')$$

برهن أن Z^2 مجهزة ببنية حلقة . ادرس خواص هذه الحلقة .

١٤٢ - R مجموعة الأعداد الحقيقية . نعرف على R^2 عمليتين داخليتين بالشكل التالي :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) . (a', b') = (a a' + b b', a b' + b a')$$

برهن أن $(R^2, +, .)$ حلقة تبديلية هل للصفر قواسم في هذه الحلقة ؟

قم بدراسة مماثلة في الحالة التي نفرض فيها أن العملية الثانية معرفة بالشكل :

$$(a, b) . (a' . b') = (a b' + b a' - a a', b b' - a a')$$

١٤٣ - في حلقة غير تبديلية A نعرف عملية داخلية *

بالشكل التالي :

$$x * y = xy - yx$$

١ - قارن $y * x$ مع $x * y$.

٢ - برهن أن هذه العملية توزيعية من اليمين ومن اليسار بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على A .

٣ - برهن صحة العلاقتين التاليتين :

$$x * (y * z) + y * (z * x) + z * (x * y) = 0$$

$$y * (x * z) = x * (y * z) - (x * y) * z$$

١٤٤ - نعرف في زمرة جمعية A عملية ضرب داخلية بالشكل $ab = 0$. برهن أنه يمكننا عندها أن نسمي A حلقة .

١٤٥ - نعرف على $\mathfrak{P}(E)$ مجموعة أجزاء E عملية الطرح المتبادلة (التناظرية) $\triangle$ وعملية التقاطع $\cap$ برهن أن $\mathfrak{P}(E)$ المجهزة بهاتين العمليتين ، حلقة تبديلية واحدية .

١٤٦ - برهن أنه يوجد حقل يحوي عنصرين فقط وآخر يحوي ثلاثة عناصر . نرمز بـ (0,1) للعنصرين المحايدين بالنسبة للجمع والضرب المتعلقين بهذا الحقل . اكتب جدولي الجمع والضرب في مثل هذه الحقول وادرس توزيع عملية الضرب على الجمع .

ادرس امكان وجود حقل ذي أربعة عناصر .

١٤٧ - نعرف مجموعة جزئية U من R نرمز لمتحولها بـ u

ونعرفة بالعلاقة :

$$u = a + b\sqrt{2}$$

حيث a , b عددان عاديان . ونأخذ على هذه المجموعة عمليتي الجمع والضرب للأعداد الحقيقية .

برهن أن هاتين العمليتين تجهزان u ببنية حقل .

١٤٨ - لتكن الحلقة ($E , * , \circ$) . برهن الخاصة التالية :

$$a \circ b' = a' \circ b = (a . b)'$$

حيث α' هو نظير α بالنسبة للعملية الأولى $*$.

١٤٩ - لتكن E مجموعة الأعداد المركبة $a + ib$ حسب $a , b \in Z$ برهن أن ($E , + , \circ$) حلقة . بين فيما إذا كانت هـذه الحلقة تبديلية وواحدية .

ماهي البنية التي تأخذها المجموعة Z فيما إذا كان a , b عنصرين من مجموعة أصناف التوافق C_n

١٥٠ - نعرف على الجداء $Z \times Z$ العمليتين الداخليتين $\circ$ و $*$:

$$(a , b) * (a' , b') = (a + b , a' + b')$$

$$(a , b) \circ (a' , b') = (a a' - b b' , a b' + b a')$$

هل هذه المجموعة حلقة ؟ ماهي العناصر الواحدية فيها ؟ هل هـذه الحلقة تامة ؟

* ١٥١ - لتكن E مجموعة جزئية من R معرفة بالتشكل التالي :

$$\{ a + b\sqrt{3} \mid a , b \in Z \}$$

١ - نعرف على هذه المجموعة العمليتين الداخليتين (+ و .) وهما الجمع والضرب العدديين . برهن أن E حلقة جزئية من R .

٢ - نعرف في E علاقة تكافؤ $\mathcal{R}$:

$$(a + b\sqrt{3})\ \mathcal{R}\ (a' + b'\sqrt{3}) \Leftrightarrow a' - a = 2p\ ,$$
$$b - b = 2q \quad , \quad p, q \in Z$$

نرمز بـ $E/\mathcal{R}$ لمجموعة أصناف التكافؤ ما هو عدد عناصر هذه المجموعة .

٣ - اكتب جدول ضرب أصناف التكافؤ $E/\mathcal{R}$. هل لـ $E/\mathcal{R}$ بنية حقل .

٤ - برهن أن $E/\mathcal{R}$ يحوي جزءاً مثالياً I يتكون من عنصرين .

١٥٢ - إذا كانت (E و *) زمرة تبديلية برهن أنه نحصل على الحلقة (E و * و o) بالعملية o المعرفة بالشكل التالي :

$$\forall x, y \in E \quad , \quad x \circ y = 0$$

١٥٣ - نعرف على الجداء $Z \times Z$ العمليتين الداخليتين :

$$(x_1 , y_1) * (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$
$$(x_1 , y_1) \circ (x_2 , y_2) = (x_1 . x_2 , 0)$$

برهن أن (Z^2 و * و o) حلقة . ما هو صفر هذه الحلقة وواحدتها ؟ هل يوجد في هذه الحلقة قواسم للصفر ؟

١٥٤ - إذا عرفنا على المجموعة $Z \times Z$ العمليتين :

$$(x_1 , y_1) * (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$
$$(x_1 , y_1) \circ (x_2 , y_2) = (x_1 x_2 , x_1 y_2 + y_1)$$

فهل تصبح (Z^2 ، * ، o) حلقة ؟ وإذا كان ذلك فما هي العناصر الواحدية فيها إن وجدت ؟ برهن أن العملية o غير تبديلية .

١٥٥ - نرمز بـ A لمجموعة التوابع (الخطية) :

$$f(x) = a\,x + b \qquad (a\,,\, b \in \mathcal{R})$$

نجهز A بالعمليتين التاليتين :

(الجمع) $\quad f + g \;:\; x \to f(x) + g(x)$

(الضرب) $\quad f\,.\,g \;:\; x \to f[g(x)]$

١ - برهن أن A زمرة جمعية تبديلية .

٢ - برهن أن الجداء قابل للدمج ولكنه غير تبديلي .

٣ - هل A حلقة ؟

١٥٦ - نعرف على Q^2 العمليتين الداخليتين التاليتين :

$$(x_1\,,\, y_1) * (x_2\,,\, y_2) = (x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2)$$

$$(x_1\,,\, y_1)\ o\ (x_2\,,\, y_2) = (x_1\, x_2 + 2\, y_1\, y_2\,,\, x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$$

برهن أن (Q^2 ، * ، o) حقل .

برهن أنه لا يوجد حقل جزئي من Q يختلف عن Q نفسها .

الفصل الخامس

الفراغات الشعاعية

سنعالج في هذا الفصل نوعاً جديداً من البنى الجبرية نسميها الفراغات الشعاعية ، وسنعمد في هذا النوع من البنى العمليتين الداخلية والخارجية .

ولهذا الموضوع أهمية كبيرة ، فهو أداة لاغنى عنها لدراسة الرياضيات في ثوبها المعاصر الجديد ، كما أن تطبيقاته في الفيزياء والميكانيك متنوعة وهامة .

ونود قبل كل شيء أن نؤكد أن مانسميه شعاعا فيما يلي ليس ذاك الشعاع المعروف في الفيزياء والميكانيك فحسب (قطعة مستقيمة موجهة) ، بل هو كائن جبري مجرد لا يحمل أي معنى فيزيائي . وسنرى أن الشعاع بمعناه الجبري المجرد يعتبر تعميماً وتجديداً للشعاع في الفيزياء والميكانيك .

وعلى هذا فإننا سنبدأ بدراسة موجزة للأشعة بمعناها الفيزيائي ثم نحاول بعد ذلك أن نعرف البنية الجبرية الجديدة بشكل مجرد .

١ ـ • **الأشعة** : الشعاع في الفراغ العادي ، كما هو معلوم ، قطعة مستقيمة موجهة ، ولذا فإنه يتعين بعناصر أربعة : المبدأ ـ المنحى ـ الجهة ـ الطول ، ويرمز له عادة بحرف فوقه سهم مثل $\vec{a}$ أو بحرف غامق .

أو بحروف عادي إذا لم يخشى الالتباس . ونرمز لطول الشعاع $\vec{a}$ بـ $|\vec{a}|$.

إذا عينت العناصر الأربعة لشعاع سميناه شعاعاً مقيداً . نعرف على مجموعة الأشعة المقيدة في الفراغ العادي علاقة تساو نرمز لها بـ $\#$ بحيث يكون الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ متساويين $(\vec{AB} \# \vec{CD})$ فيما إذا كانا متحدين في المنحى والجهة ومتساويين في الطول .

إن من الواضح أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ ، فهي تجزىء مجموعة الأشعة المقيدة في الفراغ العادي إلى أصناف تكافؤ . نسمي كل صنف من هذه الأصناف شعاعاً طليقاً يمثله أحد عناصر هذا الصنف .

سنقصد بكلمة شعاع في هذه الفقرة الشعاع الطليق حصراً .

من المعروف أن هناك تقابلا بين مجموعة الأشعة في الفراغ العادي ومجموعة الثلاثيات المرتبة من الأعداد الحقيقية . ولذا جرت العادة أن نرمز لكل شعاع من هذا النوع بثلاثية مرتبة تمثل احداثيات (مركبات) هذا الشعاع أي :

$$\vec{a} = (x , y , z)$$

يعرف ناتج جمع الشعاعين $\vec{a_1} = (x_1 , y_1 , z_1)$ و $\vec{a_2} = (x_2 , y_2 , z_2)$ بالشكل التالي :

$$\vec{a_1} + \vec{a_2} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$$

نرى أن ناتج هذه العملية هي ثلاثية مرتبة من الأعداد الحقيقية فهي شعاع من الفراغ العادي . وهذا يعني أن عملية جمع الأشعة عملية داخلية .

ينتج عن التعريف السابق أن عملية الجمع تبديلية وقابلة للدمج

(تجميعية) ولها عنصر محايد هو الشعاع $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

ولكل شعاع من الشكل $\vec{a} = (x, y, z)$ نظير هو الشـــعاع $\vec{a'} = (-x, -y, -z)$ ونرمز للأخير عادة بالشكل $-\vec{a} = (-x, -y, -z)$.

يمكننا بعد ما تقدم أن نقول إن لمجموعة الأشعة في الفراغ العـادي بنية زمرة جمعية تبديلية V .

يعرف حاصل ضرب شعاع $\vec{a} = (x, y, z)$ بعـدد حقيقي λ على أنه الشعاع :

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

إن عملية الضرب هذه عملية خارجية تتمتع بالخواص التالية والتي تصح مهما كان λ, μ من R و $\vec{b}, \vec{a}$ من V :

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

نلخص ما قدمنا من خواص بقولنـــا ان لمجموعة الأشعة في الفراغ العادي بنية فراغ شعاعي .

إن مجموعة الأشعة في الفراغ العادي لا تنفرد وحـدها بهذه الخواص المتعلقة بعمليتي الجمع والضرب الواردتين سابقاً ، بل تشترك معها في هذه الخواص كثير من البنى الرياضية . وبما أنه لا تهمنا طبيعة الأشعة نفسها

بقدر ماتهمنا الخواص المعينة التي تتمتع بها هاتان العمليتان ، لذا سنعطي فيما يلي تعريفاً عاماً للفراغ الشعاعي يشمل الحالة الخاصة المذكورة سابقاً .

٢ ـ ٥ الفراغ الشعاعي :

إذا عرفنا على المجموعة V عمليتين الأولى داخلية ورمزنا لها بـ + والثانية خارجية ورمزنا لها بـ . وكانت مجموعة مؤثراتها حقلاً تبديلياً F ، فإننا نسمي البنية (V ، + ، .) فراغاً شعاعياً إذا تحققت الشروط التالية :

١ ـ (V ، +) زمرة تبديلية ، أي مهما كانت $a, b, c \in V$ فإن :

ج١ : $a + b \in V$

ج٢ : $a + b = b + a$

ج٣ : $a + (b + c) = (a + b) + c$

ج٤ : يوجد عنصر $0 \in V$ بحيث

$$a + 0 = a$$

ج٥ : لكل عنصر a نظيراً $-a$ أي :

$$a + (-a) = 0$$

٢ ـ عملية الضرب تتمتع بالخواص التالية :

ض١ : يقابل كل عنصر α من F وكل عنصر a من V عنصر جديد نرمز له بـ $\alpha . a$ أو αa بحيث يكون :

ض٢ : $(\alpha \beta) a = \alpha (\beta \alpha)$

ض٣ : $\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b$

ض٤ : $(\alpha+\beta)\,a=\alpha\,a+\beta\,a$

ض٥ : $1\,a=a$

لقد رمزنا لعناصر V بحروف لاتينية نسمي كل منها شعاعاً ومثلنا عناصر الحقل F بحروف يونانية نسميها مقادير سلمية وحيث 1 هو العنصر الحايد للضرب المعرف على F .

٣ - ٥ أمثلة :

(١) - ليكن F حقلاً تبديلياً و n عدداً صحيحاً موجباً و $V_n(F)$ المجموعة التي يتكون كل عنصر منها من n عنصراً من F وفق ترتيب معين مثل :

$$a=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\ ,\ \alpha_i\in F\ (i=1,2,\dots,n)$$

لنعرف على $V_n(F)$ عملية الجمع بالشكل :

$$a+b=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)+(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$$

$$=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n) \qquad (1)$$

ونعرف عملية الضرب بعنصر من F بالشكل :

$$\lambda\,a=(\lambda\,\alpha_1,\lambda\,\alpha_2,\dots,\lambda\,\alpha_n) \qquad (2)$$

ونبرهن أن $V_n(F)$ تمثل فراغاً شعاعياً على الحقل F .

من الواضح أنه مهما كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ من $V_n(F)$ فإن $\vec{a}+\vec{b}$ هو عنصر من $V_n(F)$.

إذ : $\vec{a}+\vec{b}=(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n)$

$$\vec{b}+\vec{a}=(\beta_1+\alpha_1,\dots,\beta_n+\alpha_n)$$

ولكن بما أن α_i و β_i عناصر من الحقل F وعملية الجمع في هـذا الحقل تبديلية فإن :

$$\alpha_i + \beta_i = \beta_i + \alpha_i \quad , \quad (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

وبالتالي نجد : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

وبطريقة مماثلة نتحقق من أن العنصر :

$$\vec{0} = (0 , 0 , \ldots , 0)$$

هو العنصر المحايد بالنسبة للجمع . وأن لكل عنصر $(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n)$ نظيراً هو $(-\alpha_1 , -\alpha_2 , \ldots , -\alpha_n)$.

ويمكن أن نتحقق بسهولة (بالاعتماد على كون F حقلاً) أن عملية ضرب شعاع من $V_n(F)$ بعنصر من F المعرفة وفق (2) تحقق المبادىء الخمسة ص١ - ص٥ وبذلك يثبت المطلوب .

(٢) ـ لتكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين المتجانستين :

$$(3) \quad \begin{cases} a\,x + b\,y = 0 \\ c\,x + d\,y = 0 \end{cases}$$

في المجهولين x , y وحيث a , b , c , d أعداد حقيقية تحقق العلاقة ad = bc [١] . لنكتب كل حل للجملة (3) على شكل زوج مرتب (x , y) تمثل المركبة الأولى فيه قيمة x والمركبة الثانيـة قيمة y .

---

(١) إن لهذه الجملة عدد غير منته من الحلول لأن معين أمثالها يساوي الصفر .

ولنعرف مجموع حلين بالشكل :

$$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

ونعرف حاصل ضرب حل بعدد حقيقي λ بالشكل :

$$\lambda (x , y) = (\lambda x , \lambda y) \quad , \quad \forall \lambda \in R$$

ولنبرهن أن مجموعة حلول الجملة (3) تشكل فراغاً شعاعياً .

من الواضح أن مجموع حلين هو حل لأنه (بالاعتماد على الخواص التوزيعية والتبديلية والتجميعية لحقل الأعداد R) يكون :

$$a (x_1 + x_2) + b (y_1 + y_2) = (a x_1 + b y_1) + (a x_2 + b y_2) = 0$$

$$c (x_1 + x_2) + d (y_1 + y_2) = (c x_1 + d y_1) + (c x_2 + d y_2) = 0$$

وإذا كان (x , y) حلاً فإن ($\lambda x , \lambda y$) حل كذلك ، لأنه حسب خواص الحقل R بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب :

$$a (\lambda x) + b (\lambda y) = \lambda (a x + b y) = \lambda (0) = 0$$

$$c (\lambda x) + d (\lambda y) = \lambda (c x + d y) = \lambda (0) = 0$$

وبالعودة إلى تعريف الفراغ الشعاعي نجد أن مجموعة الحل هذه تمثل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي فراغاً شعاعياً .

ملاحظة : من المعلوم أنه إذا كان $ad \neq bc$ فللجملة المفروضة حل وحيد هو (0,0) والفراغ الشعاعي يتكون من عنصر واحد .

(٣) ـ لتكن V(R) مجموعة الأزواج المرتبة :

$$V = \{ (a , b) \; : \; a , b \in R \}$$

ولنبرهن أن V(R) لا تمثل فراغاً شعاعياً على الحقل R إذا عرفنا عمليتي الجمع والضرب بعدد حقيقي وفق :

$$(a , b) + (c , d) = (a , b)$$

$$\lambda (a , b) = (\lambda a , \lambda b)$$

من الواضح أن :

$$(a , b) + (c , d) = (a , b)$$

$$(c , d) + (a , b) = (c , d)$$

فالخاصة التبديلية ج٢ غير محققة .

(٤) - لنفرض أن U(F) , V(F) فراغان شعاعيان على حقل F .
لنفرض W(F) مجموعة الأزواج (u , v) حيث u ∈ U و v ∈ V .
لنعرف العملية + بالقاعدة :

$$(u , v) + (u' , v') = (u + u' , v + v')$$

ونعرف عملية الضرب بعنصر من F بالقاعدة :

$$\lambda (u , v) = (\lambda u , \lambda v) \quad , \quad \forall \lambda \in F$$

ولنبرهن أن W(F) تمثل فراغاً شعاعياً على الحقل F . نسمي W(F) المجموع المباشر لـ U(F) , V(F) ونرمز له أحياناً بـ $U \dotplus V$.

وفي الحقيقة :

١ - إن حاصل جمع شعاعين من W(F) هو حسب التعريف شعاع من W .

٢ - إن الجمع المعرف على W(F) تجميعي ويمكن برهان ذلك بسهولة

[illegible]

[illegible] $W(F)$ [illegible]

[illegible]

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$
$$= (u' + u, v' + v)$$
$$= (u', v') + (u, v)$$

[illegible]

$$(u, v) + (0, 0) = (u + 0, v + 0) = (u, v)$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$(\lambda \mu)(u, v) = (\lambda \mu u, \lambda \mu v)$$
$$\lambda(\mu(u, v)) = \lambda(\mu u, \mu v) = (\lambda \mu u, \lambda \mu v)$$

إذن :

$$(\lambda \mu)(u, v) = \lambda(\mu(u, v))$$

٨ - $\forall \lambda \in F$ [illegible]

$$\lambda[(u, v) + (u', v')] = \lambda(u + u', v + v')$$

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) \cdot \vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{u} + \ldots + \alpha_m \vec{u}$$

$$\forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F \;,\; \forall\, \vec{u}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in V$$

$$\vec{u} = 1 . \vec{u} = (1+0) . \vec{u} = 1 . \vec{u} + 0 . \vec{u}$$

$$= \vec{u} + 0 . \vec{u}$$

وبما أن الجمع قابل للاختصار نجد : $0 . \vec{u} = \vec{0}$

٢ ـ لما كان (حسب ج٤ من [٢-٥]) . $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

نجد حسب ض٣ من [٢-٥] أن :

$$\alpha . \vec{u} = \alpha . (\vec{u} + \vec{0}) = \alpha . \vec{u} + \alpha . \vec{0}$$

ومنه نجد أن : $\alpha \; \vec{0} = \vec{0} \quad \forall \alpha \in F$

(٣) نعلم أن : $\alpha + (-\alpha) = 0$

وبالتالي : $(\alpha + (-\alpha)) . \vec{u} = 0 . \vec{u} = \vec{0}$

وحسب ض٤ من [٢-٥] يكون :

$$\alpha . \vec{u} + (-\alpha) . \vec{u} = \vec{0}$$

وبما أن النظير وحيد يكون : $(-\alpha) \vec{u} = -(\alpha . \vec{u})$

ويتم برهان $(\alpha . \vec{u}) - = (\vec{u} -) . \alpha$ بشكل مماثل .

(٤) يمكن برهان الجزء الأول اعتماداً على ض٣ والجزء الثاني اعتماداً على ض٤ من [٢-٥] بطريقة التراجع وهو المطلوب .

٥ ـ ٥ نتيجة : إذا كان $\alpha . \vec{u} = \vec{0}$ فإن $\alpha = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$ لأنه إذا كان $\alpha \neq 0$ فإن لـ α مقلوباً α^{-1} ويكون :

$$\alpha^{-1} . (\alpha . \vec{u}) = \alpha^{-1} . (\vec{0}) = \vec{0}$$

ولكن حسب ض٢ و ض٥ من [٢ – ٥] نجد :

$$\alpha^{-1}.(\alpha.\vec{u}) = (\alpha^{-1}.\alpha).\vec{u} = 1.\vec{u} = \vec{u} \quad \text{ومنه} \quad \vec{u} = \vec{0}$$

الفراغات الشعاعية الجزئية :

٦ – ٥ تعريف إذا كان V فراغاً شعاعياً على الحقل التبديلي F وإذا كانت U مجموعة جزئية من V غير خالية فإننا ندعو U فراغاً شعاعياً جزئياً من V إذا كانت U هي بحد ذاتها فراغاً شعاعياً على F بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعنصر من F المعرفتين على V .

ومن هذا ينتج أنه إذا كان $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعين من U , λ عنصراً من F فإنه يلزم أن يكون كل من $\vec{u}+\vec{v}$ و $\lambda\vec{u}$ من U . وبعبارة مختصرة إن عمليتي الجمع والضرب بعنصر من F مغلقتان (مستقرتان) في U .
والعكس صحيح كما يتضح من النظرية التالية :

٧ –٥ نظرية : يكفي لكي تكون U المجموعة الجزئية غير الخالية من الفراغ الشعاعي V على الحقل التبديلي F فراغاً شعاعياً جزئياً على F أن تكون عمليتا الجمع والضرب بعنصر من F مغلقتين في U .

البرهان : من الواضح أن الخاصة ج١ من [٢ – ٥] محققة لأن عملية الجمع مغلقة في U كما أن الخاصتين ج٢ و ج٣ محققتان في U لأنهما محققتان في V . وإذا كان $\vec{u} \in U$ فإن $(-1)\vec{u} \in U$ لأن $-1 \in F$.
ولكن $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$ وهذا يعني أن لكل عنصر $\vec{u}$ من U نظيراً $-\vec{u}$

[illegible]

[illegible] :

(١) ـ ليكن الفراغ المتجه $V_3(R)$ [illegible] كل عنصر فيه من [illegible] من R أي :

$$V_3(R) = \left\{ \vec{u} = (a_1, a_2, a_3) \; : \; a_i \in R, \; i = 1, 2, 3 \right\}$$

أي جميع عناصر هذا الفراغ ذات الشكل :

$$(a_1, a_2, a_3)$$

تشكل [illegible] $V_3(R)$ [illegible]

[illegible] $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ [illegible]

[illegible] :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

[illegible] :

$$k \cdot \vec{a} = (k a_1, k a_2, k a_3)$$

[illegible]

يشكل جميع الأشكال [illegible] V

[illegible]

(٢) - إن الصورة [illegible] U [illegible] من العناصر ذات الشكل :

$$Q \in [illegible]$$

لا تشكل فراغاً جزئياً لأنه إذا [illegible] عنصر من [illegible] فإن :

$$a(x, y, z) = (ax, ay, az)$$

لا ينتمي إلى U عندما يكون a عدداً غير عادي لأن عنصر ضرب عدد غير عادي بعدد عادي هو غير عادي

(٣) - إن الصورة الجزئية U من $V_3(R)$ التي تتكون من العناصر ذات الشكل :

$$[illegible] \quad (a, 2a, a+1)$$

لا تشكل فراغاً جزئياً لأن مجموع عنصرين من U :

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

ليس عنصراً من U لأن المركبة الثالثة [illegible] 2 من المركبة الأولى في [illegible]

٢ - ٥ نظرية . ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل F ولتكن [illegible] جملة مكونة من عدد [illegible] من الفراغ الشعاعي V

($m > 0$) . إن المجموعة U المكونة من جميع العناصر :

$$\alpha_1 \vec{u_1} + \ldots + \alpha_m \vec{u_m}$$

حيث $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_m$ عناصر كيفية من F ، تمثل فراغا شعاعيا جزئياً من V (ندعوه الفراغ المولد من الأشعة $\vec{u_1} , \ldots , \vec{u_m}$) .

البرهان : من الواضح أن U ليست خالية فالعنصر $\vec{u_1}$ ينتمي لها ، ثم أن :

$$(\alpha_1 \vec{u_1} + \ldots + \alpha_m \vec{u_m}) + (\beta_1 \vec{u_1} + \ldots + \beta_m \vec{u_m}) =$$

$$((\alpha_1 + \beta_1) \vec{u_1} + \ldots + (\alpha_m + \beta_m) \vec{u_m})$$

$$\lambda (\alpha_1 \vec{u_1} + \ldots + \alpha_m \vec{u_m}) = (\lambda \alpha_1 \vec{u_1} + \ldots + \lambda \alpha_m \vec{u_m})$$

$$\forall \lambda , \alpha_i , \beta_i \in F \quad , \quad (i , j = 1 , \ldots , m)$$

يتضح مما سبق أن ناتج جمع عنصرين من U هو عنصر من U وناتج ضرب عنصر من U بعنصر من F هو عنصر من U وهـذا يكفي وفق [٥ - ٧] .

سنرمز للفراغ المولد من الأشعة $\vec{u_1} , \ldots , \vec{u_m}$ بالشكل $[\vec{u_1} , \ldots , \vec{u_m}]$.

الاستقلال الخطي :

١٠ - ٥ **تعريف** نقول عن جملة الأشعة $\vec{u_1} , \ldots , \vec{u_m}$ من الفراغ V(F) إنها مرتبطة خطياً إذا وجدت في F عناصر $\alpha_1 , \ldots , \alpha_m$ ليست جميعها معدومة بحيث يكون :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0}$$

أما إذا كان :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

فإننا نقول إن هذه الأشعة مستقلة خطياً .

١١ - ٥ أمثلة :

(١) لتكن لدينا مجموعة الأشعة :

$$\vec{u}_1 = (2, 5, -6) \quad , \quad \vec{u}_2 = (1, 0, 2) \quad , \quad \vec{u}_3 = (-1, -2, 2)$$

من $V_3(R)$. إن هذه الأشعة مرتبطة خطياً لأن :

$$2 \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 5 \vec{u}_3 = \vec{0}$$

في حين أن الشعاعين :

$$\vec{u}_1 = (1, 5) \quad , \quad \vec{u}_2 = (2, 3)$$

من $V_2(R)$ مستقلان خطياً لأن :

$$\alpha_1 (1, 5) + \alpha_2 (2, 3) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

وذلك لأنه يلزم ليكون هذان الشعاعان مستقلين خطياً :

$$\alpha_1 + 2 \alpha_2 = 0 \quad , \quad 5 \alpha_1 + 3 \alpha_2 = 0$$

وليس لهاتين المعادلتين سوى الحل $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(٢) إن كل جملة أشعة $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ من فراغ $V(F)$ مرتبطة خطياً

إذا كان أحدها من الشعاع الصفري لأنه إذا كان $\vec{u_1}$ هذا الشعاع (إذا لم يكن $\vec{u_1}$ الشعاع الصفري فإننا نغير ترقيم الأشعة بحيث نجعل الشعاع الصفري هو الشعاع الأول) فإن :

$$\vec{0} = 1 \cdot \vec{u_1} + 0 \cdot \vec{u_2} + \dots + 0 \cdot \vec{u_m}$$

ونلاحظ أن العناصر (1 ، 0 ، ... ، 0) التي ذكرناها في التعريف [...] ليست معدومة جميعاً وهو المطلوب .

(٣) إذا كانت جملة الأشعة من $V(F)$ مكونة من شعاع واحد $\vec{u}$ غير الشعاع الصفري فهي مستقلة خطياً لأن $\vec{0} = \vec{u} \cdot \alpha$ يقتضي وفق [...] أن يكون $\alpha = 0$.

(٤) ملاحظة : لنفرض أن الأشعة $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_m}$ من $V(F)$ مرتبطة خطياً عندئذ يوجد في F عناصر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ليست معدومة جميعاً بحيث يكون :

$$\alpha_1 \vec{u_1} + \dots + \alpha_m \vec{u_m} = \vec{0}$$

لنفرض أن $\alpha_1 \neq 0$ مثلاً ، عندئذ يمكننا أن نضرب طرفي هذه المعادلة بـ α_1^{-1} فنجد :

$$\vec{u_1} = -(\alpha_1^{-1} \alpha_2 \vec{u_2} + \dots + \alpha_1^{-1} \alpha_m \vec{u_m})$$

وهكذا نجد أنه يلزم ويكفي لتكون جملة أشعة من الفراغ $V(F)$ مرتبطة خطياً أن نتمكن من التعبير عن أحدها بدلالة تركيب خطي من الأشعة الباقية بأمثال من F .

تعريف : نقول عن شعاع $\vec{w}$ من الفراغ $V(F)$ إنه مرتبط خطياً بالأشعة $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ من الفراغ ذاته إذا أمكن كتابته على شكل تركيب خطي من هذه الأشعة بأمثال من F .

ملاحظات : (١) إذا كانت مجموعة من الأشعة $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ من فراغ شعاعي $V(F)$ مستقلة خطياً فإن أي مجموعة جزئية منها غير خالية مستقلة خطياً .

(٢) إذا كانت $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ عناصر مستقلة خطياً من فراغ شعاعي $V(F)$ فعندئذ :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_m \vec{u}_m = \beta_1 \vec{u}_1 + \cdots + \beta_m \vec{u}_m \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$$
$$(i = 1 , \ldots , m)$$

(٣) إذا كانت : $\vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \ldots , \vec{u}_m \in V(F)$ و $\beta_2 , \ldots , \beta_m \in F$ بحيث تكون الأشعة :

$$\vec{u}_2 + \beta_2 \vec{u}_1 , \vec{u}_3 + \beta_3 \vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m + \beta_m \vec{u}_1$$

مرتبطة خطياً فعندئذ تكون الأشعة $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً .

أثبت ذلك .

(٤) لنفرض جدلاً أن مجموعة جزئية من $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً ، ولتكن للتوضيح $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_r$ $(1 \leqslant r < m)$ هذه المجموعة ، عندئذ نتمكن من إيجاد العناصر $\alpha_1 , \ldots , \alpha_r$ من F (ليست معدومة جميعاً) بحيث يكون : $\alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{u}_r = \vec{0}$.

فنجد عندئذ أن :

$$\alpha_1 \vec{u} + \dots + \alpha_r \vec{u_r} + 0\, \vec{u}_{r+1} + \dots + 0\, \vec{u}_m = \vec{0}$$

وهذا يعني أن جملة الأشعة $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً وهذا مخالف للفرض وهو المطلوب .

(٢) يمكن كتابة المساواة المذكورة بالشكل :

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_m \vec{u}_m - (\beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_m \vec{u}_m) = \vec{0}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{u}_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m) \vec{u}_m = \vec{0}$$

وبما أن $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ مستقلة خطياً فان :

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad , \quad i = 1 , \dots , m$$

وهو المطلوب .

(٣) بما أن الأشعة المذكورة مرتبطة خطياً فإنه توجد في F عناصر $\alpha_2 , \dots , \alpha_m$ ليست معدومة جميعاً بحيث يكون :

$$\alpha_2 (\vec{u}_2 + \beta_2 \vec{u}_1) + \dots + \alpha_m (\vec{u}_m + \beta_m \vec{u}_1) = \vec{0}$$

ومنه :

$$(\alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_m \beta_m) \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots \alpha_m \vec{u}_m = \vec{0}$$

وهذا يعني أن الأشعة $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً وذلك لأن عوامل هذا التركيب ليست كلها معدومة نتيجة لما فرضناه .

١٥ - ٥ نتيجة : إذا كانت الأشعة $\vec{u}_1 , \dots , \vec{u}_m$ من فراغ شعاعي

V(F) مرتبطة خطياً فإن كل مجموعة $\vec{u}, \vec{u}_m, \ldots, \vec{u}_1$ مهما كان $\vec{u}$ من V(F) مرتبطة خطياً . لأنه لو كانت هـــذه الأشعة مستقلة خطياً فإن $u_m, \ldots, u_1$ تكون وفق (١) من [١٤ - ٥] مستقلة خطياً وهـــذا مخالف للفرض .

١٦ - ٥ تعريف : نقول عن جملة أشعة من V(F) عددها غير منته إنها مرتبطة خطياً فيما إذا حوت مجموعة جزئية منتهية مرتبطة خطياً . أما إذا كانت كل مجموعة جزئية منتهية مكونة من عناصر تقع في جملة الأشعة المفروضة مستقلة خطياً ، فاننا نقول إن هذه الجملة مستقلة خطياً .

أبعاد الفراغات الشعاعية :

١٧ - ٥ تعريف : نقول إن الفراغ الشـــعاعي V ذو n بعـداً ($n \geqslant 0$) ونكتب $\dim V = n$ إذا وجد في V مجموعـــة مكونة من n شعاعاً مستقلة خطياً وإذا كانت كل مجموعة مكونة من أكثر من n شعاعاً مرتبطة خطياً .

أما إذا احتوى V مجموعة مستقلة خطياً مكونة من عدد غير منته من الأشعة فإن $\dim V = \infty$. وإذا كان $\dim V = 0$ فإن هذا يعني أن V يتكون من العنصر الصفري .

١٨ - ٥ مثال : إن $V_1(F)$ الذي يتكون من جميع الأشـــعة ذات الشكل :

$$(\alpha) \quad , \quad \alpha \in F$$

[illegible] الأرض المربعة [illegible]

([illegible]) [illegible] [illegible]

[illegible] خطيا [illegible]

[illegible] (α) و (β) [illegible] والبرهان [illegible]

[illegible] الشعاع [illegible] فإننا نستطيع [illegible]

[illegible] $\alpha(\beta) - \beta(\alpha)$ [illegible]

وهذا يدل على الارتباط الخطي وهو المطلوب .

[illegible] نظرية : إذا كانت [illegible] $\vec{v}_m, \ldots$ [illegible]

[illegible] مكونة من m [illegible]

[illegible] مرتبطة خطيا .

البرهان : [illegible]

[illegible] مرتبطان خطيا .

[illegible] β [illegible] $\vec{v}_1 - \beta$ [illegible]

[illegible] $\alpha = $ [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$-\beta \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 = 0$$

[illegible] على الارتباط الخطي .

[illegible] أن نفرض أن النظرية صحيحة [illegible] $k = m$

[illegible] $m = k + 1$. [illegible] $\vec{v}_1, \ldots$ [illegible]

عنصر من [$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k+1}$] فإنه يمكن كتابة :

$$\vec{v}_1 = \alpha_{1,1}\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_{1,k+1}\vec{u}_{k+1}$$

$$(1) \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\vec{v}_{k+2} = \alpha_{k+2,1}\vec{u}_1 + \ldots + \alpha_{k+2,k+1}\vec{u}_{k+1}$$

حيث :

$$\alpha_{i,j} \in F \quad , \quad i = 1, \ldots, k+2 \quad , \quad j = 1, \ldots, k+1$$

فإذا كانت أمثال $\vec{u}_1$ في هذه المعادلات مساوية للصفر جميعاً فعندئذ تكون الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+2}$ مولدة من k شعاعاً فقط $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}$ فهي مرتبطة خطياً لأن النظرية صحيحة من أجل n = k كما افترضنا ، وتكون بالتالي الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{k+2}$ استناداً إلى [[illegible]] مرتبطة خطياً .

أما إذا لم تكن جميع أمثال $\vec{u}_1$ معدومة ولنفرض على سبيل المثال $\alpha_{1,1}$ غير معدوم فعندئذ يكون :

$$\vec{u}_1 = \alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1 - \alpha_{1,1}^{-1}\alpha_{1,2}\vec{u}_2 - \ldots - \alpha_{1,1}^{-1}\alpha_{1,k+1}\vec{u}_{k+1}$$

وبالاستفادة من المعادلة الثانية من (1) نجد أن $\vec{v}_2 - \alpha_{2,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1$ تركيب خطي من $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}$ أي أنه عنصر من [$\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}$] وهكذا بالطريقة ذاتها نجد أن جميع الأشعة :

$$\vec{v}_2 - \alpha_{2,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1 \; , \; \vec{v}_3 - \alpha_{3,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1 \; , \; \ldots \; ,$$
$$\vec{v}_{k+2} - \alpha_{k+2,1}\alpha_{1,1}^{-1}\vec{v}_1$$

عناصر من [$\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{k+1}$] فهي مرتبطة خطياً لأننا فرضنا أن

النظرية صحيحة من أجل $m = k$. وبالعودة إلى (٣) من [١٤ - ٥] نجد أن الأشعة $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+2}$ مرتبطة خطياً وهو المطلوب .

نتـــائج :

٢٠ - ٥ إن $\dim V_n(F) = n$.

البرهان : إن $V_n(F)$ يتكون من جميع الأشعة ذات الشكل :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad , \quad \alpha_i \in F \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

ولكن الأشعة :

$$\vec{u}_1 = (1, 0, \dots, 0) \; ; \; \vec{u}_2 = (0, 1, \dots, 0) \; , \; \vec{u}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

مستقلة خطياً كما يتضح بسهولة :

$$\beta_1 (1, 0, \dots, 0) + \beta_2 (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \beta_n (0, 0, \dots, 1) = 0$$

تؤدي إلى كون : $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$

وبما أن كل شعاع من $V_n(F)$ يكتب بالشكل :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n$$

أي أن $V_n(F)$ هو الفراغ المولد $[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$ وبالتالي استناداً إلى [١٩ - ٥] يكون كل $m + 1$ شعاعا من $V_n(F)$ مرتبطة خطيا وهو المطلوب .

٢١ - ٥ إذا كانت $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ عناصر من فراغ شعاعي V على حقل F . وإذا كان U فراغاً شعاعياً جزئياً من V مولداً من هـــذه الأشعة فان $\dim U \leqslant m$. ثم أنه يلزم ويكفي كي يكون $\dim U = m$

هو أن تكون الأشعة المذكورة مستقلة خطياً .

البرهان : بما أن كل $m + 1$ شعاعاً من الفراغ المولد المذكور مرتبطة خطياً استناداً إلى [١٨ - ٥] فان عدد أبعاد هذا الفراغ أقل من $m + 1$ حتماً ، أي أصغر أو يساوي m .

وإذا كانت الأشعة $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ مستقلة خطياً فعندئذ يكون وفق التعريف [١٦ - ٥] $\dim U = m$. أما إذا كانت الأشعة $\vec{u}_1 , \ldots , \vec{u}_m$ مرتبطة خطياً فعندئذ يمكن التعبير عن أحدها بدلالة البقية . ومن هذا ينتج أن U يمكن أن يتولد من $m - 1$ شعاعاً وبالتالي $\dim U \leqslant m - 1 < m$ وهو المطلوب .

قاعدة (أساس) فراغ شعاعي :

٢١ - ٥ **تعريف** : إذا كان V فراغاً شعاعياً على الحقل F . وإذا كان $\dim V = n$ حيث n عدد محدود ، فاننا نسمي كل مجموعة مرتبة من الأشعة المستقلة خطياً $\vec{v}_1 , \ldots \vec{v}_n$ من V قاعدة (أساساً) لهذا الفراغ ونرمز لهذه القاعدة اختصاراً بـ $\{ \vec{v}_i \} , i = 1 , \ldots n$.

٢٢ - ٥ **نتيجة** : إذا كانت $\{ \vec{v}_i \}$ قاعدة في فراغ شعاعي $V(F)$ فان كل شعاع $\vec{x}$ من V هو تركيب خطي من $\{ \vec{v}_i \}$. وهذا واضح لأن الأشعة $\vec{v}_1 , \ldots , \vec{v}_n , \vec{x}$ مرتبطة خطياً (إذن $\dim V = n$) وبالتالي نستطيع أن نجد العناصر $\beta_0 , \beta_1 , \ldots , \beta_n$ من F التي ليست جميعها أصفاراً بحيث يكون :

$$\beta_0 \vec{x} + \beta_1 \vec{v}_1 + \ldots + \beta_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

إن $\beta_0 \neq 0$ وإلا لكانت الأشعة $\vec{v_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ مرتبطة خطياً وهذا يخالف الفرض ، وعلى هذا نجد أن :

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \ldots + \alpha_n \vec{v_n} \quad (\alpha_i = -\beta_0^{-1} . \beta_i) \qquad (1)$$

يمكن أن نرى بسهولة أن الصيغة الاخيرة في كتابة الشعاع $\vec{x}$ على شكل تركيب خطي في أشعة القاعـــدة وحيدة بالاستناد إلى (٢) من [١٣ – ٥] .

٢٣ – ٥ **تعريف** : نسمي الاعداد α_i $(i = 1, \ldots, n)$ الواردة في المساواة (١) من [٢٢ – ٥] مركبات الشعاع $\vec{x}$ في القاعدة $\{\vec{v_i}\}$ للفراغ الشعاعي V .

٢٤ – ٥ **مثال** : تمثل مجموعة الاشعة :

$$(1, 0, \ldots, 0) \;,\; (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1) \qquad (1)$$

في الفراغ $V_n(F)$ قاعدة لان $\dim V_n(F) = n$ ولان هـذه الاشعة مستقلة خطياً . وبما أن كل شعاع $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ من $V_n(F)$ يكتب بالشكل :

$$\alpha_1 (1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2 (0, 1, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n (0, 0, \ldots, 1)$$

فان مركبات هذا الشعاع بالنسبة للقاعدة هذه هي $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

نسمي القاعدة (١) القاعدة الطبيعية أو القانونية في $V_n(F)$.

٢٥ – ٥ **نظرية** : إذا كان لدينا في فراغ شعاعي $V(F)$ عدد أبعاده n , m شعاعاً مستقلاً خطياً :

$$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m} \quad (1 \leq m < n)$$

فانه يوجد $n-m$ شعاعاً آخر في V مستقلاً خطياً :

$$\vec{v}_{m+1}, \ldots, \vec{v}_n$$

وتجعل من $\vec{v}_n, \ldots, \vec{v}_1$ قاعدة في $V(F)$.

البرهان : بما أن $m < n$ فإنه يوجد في V شعاع واحد على الأقل $\vec{v}_{m+1}$ لا ينتمي إلى $[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m]$ وإلا لكان $\dim V = m < n$ ومن الواضح أن الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m+1}$ مستقلة خطياً . وإذا كان $m+1 = n$ تم المطلوب وإلا ، أي إذا كان $m+1 < n$ ، فعندئذ يمكننا أن نجد كذلك في V شعاعاً آخر $\vec{v}_{m+2}$ لاينتمي إلى $[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{m+1}]$ وهكذا .

٢٦ - ٥ أثر تغيير القاعـــدة على مركبات شعاع $\vec{x}$: إذا كانت $\{\vec{v}_i\}$ و $\{\vec{v}_i'\}$ قاعدتين مختلفتين لفراغ شعاعي V ذي n بعداً (n عدد محدود) فإنه يمكننا وفق [٢٢ - ٥] أن نكتب :

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \alpha_1' \vec{v}_1' + \ldots + \alpha_n' \vec{v}_n' \qquad (1)$$

ويمكن ، بشكل خاص ، أن تمثل الأشعة $\vec{v}_1', \ldots, \vec{v}_n'$ بدلالة القاعدة القديمة $\{\vec{v}_i\}$:

$$\vec{v}_j' = \beta_{j1} \vec{v}_1 + \ldots + \beta_{jn} \vec{v}_n \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

بالتعويض في (١) نجد :

$$\sum_i \alpha_i \vec{v}_i = \sum_j \alpha_j' \vec{v}_j' = \sum_j \alpha_j' \sum_i \beta_{ji} \vec{v}_i$$

$$= \sum_i \sum_j \alpha_j' \beta_{ji} \vec{v}_i$$

ومنه نجد أن : $\alpha_i = \sum_j \beta_{ji} \alpha_j'$

تمارين محلولة

١٥٧ - لتكن V مجموعة التطبيقات المعرفة على مجموعة غير خالية X والتي تأخذ قيمها في حقل F . وإذا كان f , g تطبيقين كيفيين من V و α عنصراً كيفياً من F فاننا نعرف f + g و α f بالشكل التالي :

$$(f+g)\ (x) = f\ (x) + g\ (x)$$

$$(\alpha f)\ (x) = \alpha f\ (x) \qquad \forall x \in X$$

برهن أن V تمثل فراغاً شعاعياً على F .

البرهان : كي يكون V فراغاً شعاعياً على F يلزم أن تتحقق الشروط ج١ - ج٥ و ض١ - ض٥ التي مر ذكرها في [٢ - ٥] .

(١) من الواضح أنه إذا كان f , g من V فان f + g ، وفق التعريف ، من V كذلك :

(٢) ثم إن :

$$(f+g)\ (x) = f\ (x) + g(x) = g(x) + f\ (x) = (g+f)\ (x)$$

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f, g \in V$$

وذلك لأن التطبيقين f(x) و g(x) عنصران من F حيث العملية + تبديلية . ومنه :

$$f + g = g + f$$

(٣) كذلك :

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)$$

$$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x)+h(x))$$

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f, g, h \in V$$

وبما أن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ عناصر من F حيث العملية + تجميعية فانه ينتج أن :

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

(٤) وإذا رمزنا بـ O للتطبيق الصفري المعرف بالشكل :

$$O(x) = 0 \qquad \forall x \in X$$

فعندئذ يكون :

$$(f+O)(x) = f(x) + O(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f \in V$$

ومنـــه :

$$f + O = f$$

وبالتالي فإن التطبيق O هو العنصر الحيادي في V .

(٥) وإذا عرفنا f - بالشكل $(-f)(x) = -f(x)$ فعندئذ يكون :

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = O(x)$$

$$\forall x \in X$$

أي :

$$f + (-f) = O$$

(٦) ثم من الواضح أنـــه $\forall f \in V \quad , \quad \forall \alpha \in F$ فإن $\alpha f \in V$

وفق التعريف .

(٧)
$$((\alpha \beta) f)(x) = (\alpha \beta) f(x) = \alpha (\beta f(x))$$
$$= \alpha (\beta f)(x) = (\alpha (\beta f)(x))$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha , \beta \in F \quad , \quad \forall f \in V$$

أي :

$$(\alpha \beta) f = \alpha (\beta f)$$

(٨)
$$(\alpha (f + g))(x) = \alpha((f + g)(x)) = \alpha (f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$$
$$= (\alpha f + \alpha g)(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha , \beta \in F \quad , \quad \forall f , g \in V$$

وذلك لأن الخاصة التوزيعية صحيحة في F ، ومنه :

$$\alpha (f + g) = \alpha f + \alpha g$$

(٩)
$$((\alpha + \beta) f)(x) = (\alpha + \beta) f(x)$$
$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha , \beta \in F \quad , \quad \forall f \in V$$

ومنه :
$$(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$$

(١٠) وأخيراً إذا كان 1 العنصر الحيادي للعملية (٠) في F فان :

$$(1 f)(x) = 1 f(x) = f(x)$$
$$\forall x \in X \quad , \quad \forall f \in V$$

أي :
$$1 f = f$$

وهو المطلوب .

١٥٨ - ليكن V فراغاً شـــعاعياً على حقل F وليكن v_2 , v_1 شعاعين معينين في V . ولنفرض أن V' مجموعة جزئية من V تتكون من جميع العناصر $\alpha v_1 + \beta v_2$ حيث β , α عنصرين كيفيين من F . برهن أن مجموع أي عنصرين من V' هو عنصر من V' وأن حاصل ضرب أي عنصر من F بأي عنصر من V' هو عنصر من V' كذلك، ثم برهن أن V' يمثل فراغاً شعاعياً .

الحل :

ليكن u_2 , u_1 عنصرين من V . فبما أن كل عنصر من V' هو من الشكل $\alpha v_1 + \beta v_2$ فإنه يوجـــد في F العناصر β_1 , β_2 و α_1 , α_2 بحيث يكون :

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 \quad , \quad u_2 = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2$$

بالجمع نجد :

$$u_1 + u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + (\beta_1 + \beta_2) v_2$$

وحيث أن هذا المجموع من الشكل $\alpha v_1 + \beta v_2$ فهو عنصرٌ من V' .

كذلك نلاحظ بسهولة أن :

$$\lambda u_1 = \lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \beta_1 v_2 \qquad \forall \lambda \in F$$

مما يدل أن λu_1 هو عنصر من V' .

كي نـبرهن أن V' يمثل فراغاً شعاعياً علينـــا أن نتحقق من شروط

الفراغ الشعاعي : لتكن من أجل ذلك u, u_1, u_2, u_3 عناصر كيفية من V' و $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ عناصر كيفية من F .

(١) إن مجموع شعاعين من V' هو شعاع من V' كما برهنا قبل قليل .

(٢) إذا كان :

$$u_i = \alpha_i v_1 + \beta_i v_2 \qquad i = 1, 2$$

فان (باعتبار عناصر الحقل F تخضع للخاصة التبديلية) :

$$u_1 + u_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + (\beta_1 + \beta_2) v_2$$
$$= (\alpha_2 + \alpha_1) v_1 + (\beta_2 + \beta_1) v_2 = u_2 + u_1$$

(٣) إذا كان :

$$u_i = \alpha_i v_1 + \beta_i v_2 \qquad i = 1, 2, 3$$

فان (باعتبار عناصر الحقل F تخضع للخاصة التجميعية) :

$$u_1 + (u_2 + u_3) = (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2) + ((\alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\beta_2 + \beta_3) v_2)$$
$$= (\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)) v_1 + (\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)) v_2$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) v_2$$

وبشكل مماثل نجد :

$$(u_1 + u_2) + u_3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) v_2$$

وبالتالي :

$$u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$$

(٤) إن العنصر الحيادي O بالنسبة للعملية + في V هو عنصر من V'

$O = 0\,u_1 + 0\,u_2$ كما أنه حيادي في V' لأن :

$$u + O = u$$

(٥) إن نظير $u = \alpha\, v_1 + \beta\, v_2$ هو $-\, u = (-\alpha)\, v_1 + (-\beta)\, v_2$ لأن:

$$u + (-u) = O$$

(٦) إن حاصل ضرب كل عنصر من V' بعنصر من F هو عنصر من V' كما مر معنا قبل قليل .

(٧) $$(\lambda_1\, \lambda_2)\, u = \lambda_1\, (\lambda_2\, u)$$

لأن كلا من الطرفين يساوي :

$$\lambda_1\, \lambda_2\, \alpha\, v_1 + \lambda_1\, \lambda_2\, \beta\, v_2$$

(٨) $$\lambda\, (u_1 + u_2) = \lambda\, [\, (\alpha_1 + \alpha_2)\, v_1 + (\beta_1 + \beta_2)\, v_2\,]$$

$$= \lambda\, [\, (\alpha_1 + \alpha_2) v_1 + \lambda\, (\beta_1 + \beta_2)\, v_2$$

وحيث أن عناصر F تخضع للخاصة التوزيعية فإن :

$$\lambda\, (u_1 + u_2) = \lambda\, (\alpha_1\, v_1 + \beta\, v_2) + \lambda\, (\alpha_2\, v_1 + \beta_2\, v_2)$$

$$= \lambda\, u_1 + \lambda\, u_2$$

(٩) $$(\lambda_1 + \lambda_2)\, u = \lambda_1\, \alpha\, v_1 + \lambda_1\, \beta\, v_2 + \lambda_2\, \alpha\, v_1 + \lambda_2\, \beta\, v_2$$

$$= \lambda_1\, u + \lambda_2\, u$$

(١٠) ومن الواضح أن :

$$1\,.\, u = u$$

وهو المطلوب .

ملاحظة : كان بالامكان أن نتجاوز هذا البرهان الطويل على أن V' فراغ شعاعي إذا لاحظنا أن V' فراغ شعاعي جزئي وبالتالي فهو فراغ شعاعي . غير أننـــا أوردنا البرهان مفصلاً ليعتاد القـارىء على مثل هذه البراهين .

١٥٩ - ليكن :

$$V = \{ (\alpha, \beta) \ : \ \alpha , \beta \in R\}$$

برهن أن V لا تمثل فراغاً شعاعياً على R إذا عرفنا العملية + وعملية الضرب بعدد وفق مايلي :

$$(\alpha , \beta) + (\gamma , \delta) = (\alpha + \gamma , \beta + \delta)$$

$$\lambda (\alpha , \beta) = (\lambda^2 \alpha , \lambda^2 \beta)$$

الحل : إن

$$(\lambda_1 + \lambda_2) (\alpha , \beta) = ((\lambda_1 + \lambda_2)^2 \alpha , (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \beta)$$

$$\neq ((\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \alpha , (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \beta)$$

$$= \lambda_1 (\alpha , \beta) + \lambda_2 (\alpha , \beta)$$

أي أن :

$$(\lambda_1 + \lambda_2) (\alpha , \beta) \neq \lambda_1(\alpha , \beta) + \lambda_2(\alpha , \beta)$$

فالخاصة ض٤ من [٢ - ٥] غير محققة وهو المطلوب .

١٦٠ - برهن أنه إذا كان α , β عنصرين من R وكان :

$(-1 , 1 , 3) \in V_3(R)$ و $(2 , -1 , 1)$ فانه لا يمكن أن يكون :

$$\alpha\,(2\,,-1\,,1) + \beta\,(-1\,,1\,,3) = 0 \qquad (1)$$

مالم يكن $\alpha = \beta = 0$.

الحل : من (1) نجد :

$$(2\,\alpha\,,-\alpha\,,\alpha) + (-\beta\,,\beta\,,3\,\beta) = 0$$

وبالتـــالي :

$$2\,\alpha - \beta = 0 \qquad -\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha + 3\,\beta = 0$$

من المعادلة الثانية نجد $\beta = \alpha$. وبالتعويض في كل من الأولى والثانية نجد $\alpha = \beta = 0$.

١٦١ – لتكن $\mathfrak{P}$ مجموعة كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقية المعروف عليها عملية الجمع كما في [٢٧ - ٤] . نعرف عملية ضرب عنصر λ من R بعنصر : $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ من $\mathfrak{P}$ بالشكل :

$$\lambda\, p = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 x + \ldots + \lambda\, a_n x^n \qquad (1)$$

برهن أن $\mathfrak{P}$ فراغ شعاعي بالنسبة لعملية جمع كثيرات الحدود ولعملية الضرب بعدد المعرفة بـ (١) .

البرهان :

لما كنا برهنا في [٢٧ - ٤] أن $\mathfrak{P}$ زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع كثيرات الحدود . فيبقى إثبات الخواص ض١ - ض٥ التي تبرهن بسهولة .

١٦٢ - ليكن V فراغاً شعاعياً على حقل F ولتكن $u_1\,,\ldots,u_m$ أشعة معينة في V . برهن أن U ، المجموعة الجزئية من الفراغ الشعاعي

$V_m(F)$ المعرفة بالمثال (١) [٣ - ٥] ، المكونة من العناصر :

$$(\alpha_1 , \dots , \alpha_m) \qquad \alpha_i \in F \quad (i = 1 , \dots , m)$$

بحيث يكون :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0 \tag{1}$$

تشكل فراغاً جزئياً من $V_m(F)$. عين هذا الفراغ الجزئي في الحالة التي يكون فيها $m = 3$ و

$$u_1 = (1 , 0 , 0 , 0) \quad u_2 = (1 , 1 , 0 , 0) \quad u_3 = (0 , -1 , 0 , 0)$$

الحل : لنلاحظ أن العنصر $(0 , \dots , 0)$ يحقق (1) فهو من U وبالتالي فان U غير خالية وإذا كان :

$$x = (\alpha_1 , \dots , \alpha_m)$$

$$y = (\beta_1 , \dots , \beta_m)$$

عنصرين من U أي :

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0$$

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$$

فإن :

$$(\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) u_m = 0$$

وهذا يعني أن : $x + y \in U$

وبطريقة مماثلة نبرهن أنه إذا كان $x \in U$, $\lambda \in F$ فان λx من U وهو المطلوب

وفي الحالة الخاصة نجد أن الشرط (1) يأخذ الشكل :

$$\alpha_1 (1 , 0 , 0 , 0) + \alpha_2 (1 , 1 , 0 , 0) + \alpha_3 (0 , -1 , 0 , 0) = (0 , 0 , 0 , 0)$$

وبالتالي :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

ومنه نجد :

$$-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

وبالتالي :

$$(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) = \alpha_1 (1 , -1 , -1)$$

فالفراغ الجزئي المطلوب هو الفراغ المولد من الشعاع (1- , 1- , 1)

* ۱٦٣ - ليكن V فراغاً شعاعياً على حقل F ولتكن M مجموعة جزئية من V تحوي على الأقل عنصراً واحداً ، ولتكن U مجموعة جزئية من V مكونة من جميع العناصر التي يمكن كتابتها على شكل تركيب خطي في عناصر M بأمثال من F . برهن أن U فراغ جزئي من V (ندعوه الفراغ الجزئي المتولد بـ M) . ثم برهن أنه إذا كانت M مكونة من عدد منته من أشعة V مثل $u_1 , \ldots , u_m$ فان U هو الفراغ الجزئي المعرف بالنظرية [٩ - ٥] .

الحل :

لما كانت M تحوي على الأقل عنصراً واحداً مثل u_1 فان λu_1 (حيث λ من F) ينتمي لـ U فالمجموعة U غير خالية .

وبما أن كل عنصر من U يمكن كتابته على شكل تركيب خطي في عناصر من M بأمثال من F فان مجموع كل عنصرين يمكن كتابته كذلك على شكل تركيب خطي في عناصر من M بأمثال من F فهو عنصر من U . والأمر نفسه يصح من أجل حاصل ضرب كل عنصر من U بعنصر كيفي من F . وهذا يدل على أن U فراغ جزئي من V وإذا كانت M مكونة من عدد منته من أشعة V مثل $u_1 , u_2 , \ldots , u_m$ فان كل عنصر من U يكتب بالشكل :

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m$$

ويكون U هو الفراغ الجزئي المولد من هذه الأشعة المفروضة [٩ - ٥]

١٦٣ - اكتب الشعاع $u = (1 , -2 , 5)$ على شكل تركيب خطي في الأشعة :

$$e_1 = (1 , 1 , 1) \qquad e_2 = (1 , 2 , 3) \qquad e_3 = (2 , -1 , 1)$$

الحل : لنبحث عن $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ على شكل يكون فيه :

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

أي :

$$(1 , -2 , 5) = \alpha_1 (1 , 1 , 1) + \alpha_2 (1 , 2 , 3) + \alpha_3 (2 , -1 , 1)$$

ومنه :

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2 \alpha_3$$

$$-2 = \alpha_1 + 2 \alpha_2 - \alpha_3$$

$$5 = \alpha_1 + 3 \alpha_2 + \alpha_3$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات نجد :

$$\alpha_1 = -6 \quad ; \quad \alpha_2 = 3 \quad ; \quad \alpha_3 = 2$$

وبالتالي :

$$u = -6\, e_1 + 3\, e_2 + 2\, e_3$$

١٦٤ ـ لنفرض أن F هو حقل الأعداد العادية Q . جـد حلاً غير الحل البدهي $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4$ في Q للجملة :

$$2\,\xi_1 - 3\,\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$$

$$\xi_1 + 5\,\xi_2 - 2\,\xi_3 + 3\,\xi_4 = 0$$

$$\xi_2 + \xi_3 - 5\,\xi_4 = 0$$

عين بعد ذلك مجموعة جميع الحلول $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4)$ في Q لهذه المجموعة .

الحل : من المعادلتين الأولى والثانية نجد :

$$13\,\xi_2 - 5\,\xi_3 + 7\,\xi_4 = 0 \qquad (1)$$

من هذه مع المعادلة الثالثة نحصل على :

$$\xi_3 = 4\,\xi_4$$

بالتعويض في (1) ينتج :

$$\xi_2 = \xi_4$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى من المجموعة المفروضة نجد : $\xi_1 = 0$

فاذا جعلنا $\xi_4 = 1$ مثلاً فإننا نجد الحل :

$$(0 \,,\, 1 \,,\, 4 \,,\, 1)$$

ولايجاد جميع الحلول نلاحظ أن كل حل للمجموعة المذكورة هو من الشكل :

$$(0 , \xi_4 , 4 \xi_4 , \xi_4) = \xi_4 (0 , 1 , 4 , 1)$$

حيث ξ_4 عنصر كيفي من Q .

١٦٥ - ليكن U فراغاً جزلياً من فراغ شعاعي V منتهي الأبعاد . برهن أن $\dim U \leqslant \dim V$ وأن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\dim U = \dim V$ هو أن يكون $U = V$.

الحل : إذا كان عدد أبعاد U يساوي m فهنالك m شعاعاً في U تشكل مجموعة مستقلة خطياً من الأشعة . وبما أن هذه الأشعة تنتمي لـ V كذلك فهذا يعني أن V تحوي مجموعة من الأشعة المستقلة خطياً تتكون من m شعاعاً على الأقل وهذا يعني أن $\dim V \geqslant m = \dim U$ لننتقل إلى برهان القسم الثاني .

إذا كان $U = V$ فيكون $\dim U = \dim V$. لبرهان العكس نفرض أن $\dim U = m$. وهذا يعني وجود مجموعة مستقلة من الأشعة في U عددها m شعاعاً . لتكن $u_1 , \ldots , u_m$ هذه الأشعة . إن كل شعاع من U هو تركيب خطي من هذه الأشعة ، كما أن كل تركيب خطي من هذه الأشعة هو شعاع من U . وبما أن $U \subseteq V$ فان الأشعة المذكورة تنتمي لـ V . وحيث أن $\dim V = m$ فانه لايمكن لاي شعاع من V أن يكون مستقلاً عن $u_1 , \ldots , u_m$ أي أن كل شعاع من V هو تركيب خطي منها وبالتالي فهو ينتمي لـ U وهو المطلوب .

١٦٦ - لتكن $v_1, \dots, v_r$ و $w_1, \dots, w_s$ عناصر من الفراغ الشعاعي V . برهن أن الفراغ الجزئي U من V المتولد من $v_1, \dots, v_r$ هو الفراغ الجزئي W المتولد من $w_1, \dots, w_s$ و $v_1, \dots, v_r$ ذاته إذا وإذا فقط كان كل عنصر $w_i\ (i = 1, \dots, s)$ مرتبطاً خطيـاً بالاشعة $v_1, \dots, v_r$.

الحل : إذا كان الفراغ الجزئي U المتولد من $v_1, \dots, v_r$ هو ذات الفراغ الجزئي W المتولد من $w_1, \dots, w_s$ ، $v_1, \dots, v_r$ فان كل شعاع من W مرتبط خطياً بالأشعة $v_1, \dots, v_r$ ، وبمـا أن كل $w_i (i = 1, \dots, s)$ ينتمي إلى W وذلك لأنه يمكننا أن نكتب مثلاً:

$$w_i = 0\,v_1 + \dots + 0\,v_r + 0\,w_1 + \dots + 1\,w_i + \dots + 0\,w_s$$

فهو ينتمي إلى V لأن $W = V$ وبالتالي يكون w_i مرتبطاً خطياً بالأشعة $v_1, \dots, v_r$.

وبالعكس اذا كان كل عنصر w_i مرتبطاً خطياً بالاشعة $v_1, \dots, v_r$ فعندئذ يمكن كتابة كل شعاع ينتمي لـ W على شكل تركيب خطي للأشعة $v_1, \dots, v_r$ فهو ينتمي لـ U وهو المطلوب .

١٦٧ - لتكن $u_1, \dots, u_m$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من فراغ V ولتكن $v_1, \dots, v_s$ مجموعـة أخرى من الأشعـة المستقلة خطياً ولنفرض أن :

$$[u_1, \dots, u_m] \cap [v_1, \dots, v_s] = 0$$

برهن أن الأشعة $v_1, \dots, v_s$ ، $u_1, \dots, u_m$ مستقلة خطياً .

البرهان : لو كانت الأشعة $v_1, \dots, v_s$ ، $u_1, \dots, u_m$ مرتبطة خطياً لاستطعنا الحصول على العناصر $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+s}$ من الحقل F ليست معدومة

جميعاً بحيث يكون :

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} v_1 + \ldots + \alpha_{m+s} v_s = 0$$

ومنه نجد :

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = -(\alpha_{m+1} v_1 + \ldots + \alpha_{m+s} v_s)$$

ولكن الطرف الأيسر يمثل عنصراً من $[u_1, \ldots, u_m]$ والطرف الأيمن يمثل عنصراً من $[v_1, \ldots, v_s]$ وبالتالي يجب أن يكون كل من العنصرين هو العنصر الصفري لأنه العنصر المشترك الوحيد . وهـذا يعني أن :

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$$

$$\alpha_{m+1} v_1 + \ldots + \alpha_{m+s} v_s = 0$$

وبما أن أحد العناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+s}$ على الأقل غير معدوم فان إحدى المجموعتين $u_1, \ldots, u_m$ و $v_1, \ldots, v_s$ على الأقل مرتبطة خطياً وهذا خلاف الفرض .

١٦٨ ـ إذا كان V_1 و V_2 فراغين شعاعيين جزئيين من فراغ شعاعي V على الحقل F .

(١) برهن أن $U_1 = V_1 \cap V_2$ هو فراغ جزئي من V .

(٢) إذا عرفنا $U_2 = V_1 + V_2$ بالشكل :

$$U_2 = \{ x + y \ , \ x \in V_1 \ , \ y \in V_2 \}$$

فبرهن أن $V_1 + V_2$ فراغ جزئي من V .

(٣) إذا كان V منتهي الأبعاد فان :

$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)$$

الحل :

(١) بما أن العنصر 0 ينتمي لكل من الفراغين الجزئيين V_1 و V_2 (كل فراغ جزئي يحوي العنصر الصفري) فهو ينتمي لتقاطعهما U_1 ومنه ينتج أن U_1 ليست مجموعة خالية .

ثم إن مجموع كل عنصرين من U_1 هو عنصر من U_1 لأن كل عنصرين ينتميان إلى V_1 و V_2 ينتمي مجموعها كذلك إلى V_1 و V_2 فهو ينتمي لـ U_1 .

وإذا كان u_1 عنصراً ما من U_1 فهو عنصر من V_1 ومن V_2 وبالتالي فان λu_1 مهما كانت λ من F ينتمي لكل من V_1 و V_2 فهو من U_1 .
وبالعودة إلى [٧ - ٥] نجد أن U_1 هي فراغ جزئي من V .

(٢) يترك برهان هذا القسم للقارىء لسهولته ولكونه مماثلاً لبرهان القسم الأول .

(٣) لنفرض أن أبعاد الفراغات : V_1 , V_2 و $V_1 + V_2$ و $V_1 \cap V_2$ هي r , s , t , p على الترتيب .

ولنفرض أن $\{ u_i \}$ قاعدة $V_1 \cap V_2$. إن أشعة القاعدة هذه تتكون من p شعاعاً مستقلاً خطياً . وهذه الأشعة تنتمي لكل من V_1 و V_2 . وهذا يعني أن $r \geqslant p$ و $s \geqslant p$. لنضف إلى $\{ u_i \}$ مجموعة مستقلة من الأشعة $v_1, \ldots , v_{r-p}$ بحيث نحصل على قاعدة في V_1 [٢٥ - ٥] .

ولنضف كذلك إلى $\{ u_i \}$ مجموعة مستقلة من الاشعة $w_1 , \ldots , w_{s-r}$

بحيث نحصل على قاعـــدة لـ V_2 . ومن الواضح أن الفراغ المولد من $v_1 , \ldots , v_{r-p}$ ، وليكن V_3 ، لا يشـــترك مع الفراغ المولد من $w_1 , \ldots , w_{s-r}$ ، وليكن V_4 ، إلا بالعنصر الصفري . وبما أن $V_1 + V_2$ يحوي جميع عناصر V_1 وجميـع عناصر V_2 كما أن كل شعاع منـــه هو تركيب خطي من عناصر القاعدة في V_1 وعناصر القاعدة في V_2 وحيث أن هنالك p شعاعاً مشتركا بين قاعـــدتي V_1 و V_2 فان كل شعاع من $V_1 + V_2$ تركـيب خطي من :

$$u_1 , \ldots , u_p , v_1 , \ldots , v_{r-p} , w_1 , \ldots , w_{s-p}$$

وهذه أشعة مستقلة خطياً وفق التمرين ١٦٧ . إذن :

$$t = p + (r - p) + (s - p)$$

$$= r + s - p$$

أي أن :

$$\dim (V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim (V_1 \cap V_2)$$

وهو المطلوب .

١٦٩ - تشكل الأشعة : $(0 , 2 , 4)$; $(-1 , 1 , 3)$; $(1 , 2 , 0)$ قاعدة في $V_3(Q)$. ماهي مركبات كل من الشعاعين $(6 , 0 , 1)$ و $(2 , 4 , 2)$ بالنسبة لهذه القاعدة .

الحل : لنكتب :

$$(6 , 0 , 1) = \alpha_1(1 , 2 , 0) + \alpha_2(-1 , 1 , 3) + \alpha_3(0 , 2 , 4)$$

ومنه نجـــد :

$$6 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad ; \quad 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \quad ; \quad 1 = 3\alpha_2 + 4\alpha_3$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات نجد :

$$\alpha_1 = -\frac{7}{3} \quad ; \quad \alpha_2 = -\frac{25}{3} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{13}{2}$$

وهذه مركبات الشعاع (1 , 0 , 6) وفق القاعدة المفروضة . بطريقة مماثلة نجد مركبات الشعاع (2 , 4 , 2) .

* ١٧٠ - إذا كانت $U_1, \ldots, U_n$ فراغات جزئيـــة من فراغ شعاعي V فإننا نقول عن V أنه مجموع مباشر لهذه الفراغات الجزئية إذا أمكن تمثيل كل عنصر v من V على شكل مجموع :

$$v = u_1 + \ldots + u_n$$

حيث $u_i \in U_i$ وبفرض أن هذا التمثيل لا يتم إلا بشكل وحيد . نكتب في هذه الحالة :

$$V = U_1 \dotplus U_2 \dotplus \ldots \dotplus U_n$$

برهن أن :

$$\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$$

الحل : بما أن كل شعاع u_i من U_i يكتب على شكل تركيب خطي من أشعة القاعدة في U_i فان كل شعاع v من V :

$$v = u_1 + \ldots + u_n \qquad (1)$$

يكتب على شكل تركيب خطي من مجموعة الأشعة w التي هي اجتماع مجموعات أشعة القواعد لـ $U_1, \ldots, U_n$ من هذا نستنتج أن :

$$\dim V \leqslant \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$$

ولكن لا تشترك أية قاعدتين من قواعد Ui بأي شعاع لأن هذا يعني أن هذا الشعاع يمثل بشكلين مختلفين من الشكل (١) الأمر الذي يتنافى مع كون الشكل (١) وحيداً ، وعلى هذا نجد أن :

$$\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_n$$

وهو المطلوب :

١٧١ - برهن أن الأشعة :

$$(1, 1, 1, 1) \quad , \quad (0, 1, 1, 1) \quad , \quad (0, 0, 1, 1) \quad , \quad (0, 0, 0, 1)$$

تشكل قاعدة في الفراغ $V_4(F)$.

الحل : من الواضح أن الأشعة المذكورة مستقلة خطياً ، لأن المعادلة التالية :

$$\alpha_1(1, 1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1, 1) + \alpha_3(0, 0, 1, 1) +$$
$$+ \alpha_4(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

لا تتحقق إلا إذا كان :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, 0, 0)$$

وبما أن عدد أبعاد V_4 هي 4 فان الأشعة المذكورة تشكل قاعدة في V_4 وهو المطلوب .

تمارين غير محلولة

١٧٢ - إذكر ما إذا كان كل مما يلي فراغاً شعاعياً على الحقل المذكور بجانبه وذلك باستعمال التعاريف المعتادة للجمع والضرب بعنصر من الحقل :

– مجموعة الأعداد الحقيقية من الشكل $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt[3]{3}$ حيث α ، β ، γ عناصر من Q . الحقل هو Q .

– مجموعة كثيرات الحدود من درجة أكبر من الدرجة 5 على حقل F . الحقل F .

– مجموعة كثيرات الحدود على حقل F ، حيث الحد الثابت يساوي الصفر . الحقل F .

١٧٣ - بين أن المجموعة C المكونة من جميع الأعداد المركبة هي فراغ شعاعي على R بالنسبة لعملية الجمع المعروفة للأعداد المركبة ولعملية ضرب عدد مركب بعدد حقيقي .

١٧٤ - بين أن المجموعة C المكونة من جميع الأعداد المركبة هي فراغ شعاعي على C بالنسبة لعملية جمع الأعداد المركبة وضربها المعروفتين .

- ليكن V مجموعة الازواج المرتبة للأعداد الحقيقية :

$$V = \{ (\alpha , \beta) \ : \ \alpha , \beta \in R \}$$

برهن أن V لا تمثل فراغاً شعاعياً على R وذلك إذا عرفنا العملية + وعملية الضرب بعدد كما يلي :

$$(\alpha , \beta) + (\gamma , \delta) = (\alpha + \gamma , \beta + \delta)$$

$$\lambda (\alpha , \beta) = (\lambda \alpha , \beta)$$

١٧٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على حقل F برهن القانونين التاليين :

(١) إذا كان $\alpha , \beta \in F$ و x عنصراً غير صفري من V بحيث :

$$\alpha x = \beta x$$

فعندئذ يكون $\alpha = \beta$.

(٢) إذا كان $x , y \in V$ و α عنصراً غير صفري من F بحيث :

$$\alpha x = \alpha y$$

برهن أن $x = y$.

١٧٦ - أجر العملية التالية في $V_3(Q)$:

$$3(1 , 0 , 0) + 4(0 , 1 , 0) - \tfrac{1}{2}(0 , 0 , 1)$$

وحدد الفراغات الشعاعية الجزئية من $V_3(R)$ مما يلي .

- مجموعة جميع العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha , 2\beta , 3\gamma) \qquad \alpha , \beta , \gamma \in R$$

- مجموعة العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha , 0 , \gamma) \qquad \alpha , \gamma \in R$$

- مجموعة جميع العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha , \beta , 3) \quad \alpha , \beta \in R$$

– مجموعة جميع العناصر ذات الشكل :

$$(\alpha + 2\beta , \alpha - 3\gamma , 2\alpha + \beta + \gamma) \quad \alpha , \beta , \gamma \in R$$

١٧٧ – ليكن V فراغاً شعاعياً وليكن U_1 و U_2 مجموعتـــين جزئيتين من V على شكل تكون فيه U_2 محتواة في U_1 . برهن أنه إذا كان U_1 فراغاً جزئياً من V و U_2 فراغاً جزئياً من U_1 فعندئذ يكون U_2 فراغا جزئيا من V . برهن كذلك أنه إذا كان U_1 و U_2 فراغين جزئيين من V فعندئذ يكون U_2 فراغا جزئيا من U_1

١٧٨ – برهن أنه إذا كان $U_1 , U_2 , \ldots , U_n$ ، حيث n عدد محدود ، فراغات جزئية من V فان المجموعة $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ تشكل فراغا جزئيا من V ومن كل من U_i .

١٧٩ – ميز في مجموعات الأشعة التالية في $V_3(R)$ المرتبطة منها خطياً عن المستقلة خطيا .

$$\{ (-1 , 2 , 1) \ , \ (3 , 1 , -2) \}$$

$$\{ (2 , -1 , 1) \ , \ (1 , 2 , 3) \ , \ (0 , 1 , 2) \}$$

$$\{ (1 , 0 , -1) \ , \ (2 , 1 , 3) \ , \ (-1 , 0 , 0) \ , \ (1 , 0 , 1) \}$$

١٨٠ – يعاد السؤال السابق حيث الاشعة فيما يلي عناصر من $V_4(R)$

$$\{ (1 , 2 , 1 , 2) \ , \ (0 , 1 , 1 , 0) \ , \ (1 , 4 , 3 , 2) \}$$

$$\{ (1 , 2 , -1 , 1) \ , \ (0 , 1 , -1 , 2) \ , \ (2 , 1 , 0 , 3) \ , \ (1 , 1 , 0 , 0) \}$$

١٨١ - إذا كان y و x شعاعين من فراغ شعاعي على حقل F و $\alpha , \beta \in F$ برهن أن المجموعة :

$$\{ x , y , \alpha x + \beta y \}$$

مرتبطة خطيا .

١٨٢ - ليكن y و x شعاعين مستقلين خطيا من فراغ شعاعي على حقل F . ولتكن $\alpha , \beta , \gamma , \delta$ عناصر من F برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الشعاعان .

$$\alpha x + \beta y \quad ; \quad \gamma x + \delta y$$

مستقلين خطيا هو $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$

١٨٣ - برهن أنه إذا كان لمجموعة المعادلتين :

$$\alpha \xi + \beta \eta = 0 \qquad \alpha , \beta , \gamma , \delta \in F$$
$$\gamma \xi + \delta \eta = 0$$

حل غير الحل البدهي فعندئذ يكون الشعاعان (α , β) و (γ , δ) من $V_2(F)$ مرتبطين خطيا .

١٨٤ - برهن أنه إذا كانت مجموعة الاشعة $\{ u_1 , u_2 , \ldots , u_m \}$ ، حيث $m > 1$ ، مرتبطة خطيا فإن بعض هذه الاشعة تركيب خطي للبعض الآخر .

١٨٥ - برهن أنه إذا كان : $m > 1$ و $u \in [u_1 , u_2 , \ldots , u_m]$ و $u \notin [u_1 , u_2 , \ldots u_{m-1}]$ فإن : $u_m \in [u_1 , u_2 , \ldots , u_{m-1} , u]$.

١٨٦ - برهن أنه إذا كان :

$$[u_1, u_2, \ldots, u_m] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

وإذا كان $m \neq n$ فان واحدة على الاقل من المجموعتين :

$$[u_1, u_2, \ldots, u_m] \quad ; \quad [v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

مرتبطة خطيا .

١٨٧ - أوجد قاعدة لـ $V_3(R)$ تحوي الشعاعين :

$$(2, 1, 3) \text{ و } (1, -1, 0)$$

١٨٨ - أوجد عدد أبعاد الفراغ الجزئي :

$$[(1, 2, 1, 0), (-1, 1, -4, 3), (2, 3, 3, -1), (0, 1, -1, 1)]$$

من $V_4(R)$.

١٨٩ - ليكن U_1 و U_2 فراغين جزئيين من $V_4(R)$:

$$U_1 = [(1, 2, -1, 0), (2, 0, 1, 1)]$$

$$U_2 = [(0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 4, -3, -1)]$$

أوجـــد : $\dim U_1$, $\dim U_2$, $\dim U_1 \cap U_2$, $\dim (U_1 + U_2)$

ثم تحقق من صحة العلاقة :

$$\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$$

١٩٠ - أعط مثالاً تثبت فيه خطأ ما يلي .

إذا كانت $\{v_1, \ldots, v_n\}$ قاعدة في V وإذا كان U فراغاً جزئيـاً من V فإن مجموعة جزئية من $\{v_1, \ldots, v_n\}$ هي قاعدة U .

١٩٠ - لتكن T مجموعة جميع الفواغات الجزئية لفراغ شعاعي

غير صفري V . ولنعرف عملية الجمع في T كما في القسم الثاني من التمرين ١٦٨ . تحقق من أن T لا تمثل زمرة بالنسبة لعملية الجمع هذه .

وبرهن أنه يمكن اعتبار الحقل فراغاً شعاعياً على أي حقل جزئي منه . ثم برهن أنه إذا كانت F_1 , F_2 , F_3 حقولاً بحيث $F_1 \subset F_2 \subset F_3$ وأنه إذا كانت $\{ u_1 , \ldots , u_m \}$ قاعدة F_2 على F_1 و $\{ v_1 , \ldots , v_n \}$ قاعدة F_3 على F_2 فإن العناصر : $u_i v_j \ (i = 1 , \ldots , m, \ j = 1 , \ldots , n)$ هي قاعدة F_3 على F_1 .

١٩٢ - جد قاعدة لحقل الأعداد المركبة C باعتباره فراغاً شعاعياً على حقل الأعداد الحقيقية C .

١٩٣ - ليكن V فراغاً شعاعياً ثلاثي البعد على حقل F . ولتكن v_1 , v_2 , v_3 قاعدة هذا الفراغ وليكن $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) \in V_3(F)$ مغايراً الصفر . ولنفرض أن V' فراغاً جزئياً من V يتكون من جميع الأشعة

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \qquad \lambda_i \in F$$

التي تحقق مركباتها الشرط :

$$\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0$$

برهن أن V فراغ جزئي ثنائي البعد .

١٩٤ - لتكن P_3 مجموعة كثيرات الحدود على الحقل R والتي لا تزيد درجاتها عن 3 . برهن أن P_3 فراغ شعاعي . بين ما إذا كانت الأشعة الثلاثة التالية مستقلة خطياً :

$$t^3 - 3t^2 + 5t + 1 \quad ; \quad t^3 - t^2 + 8t + 2 \quad ; \quad 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$$

١٩٥ - برهن أنه إذا كانت الأشعة الثلاثة u, v, w من فراغ شعاعي $V(R)$ مستقلة خطياً فان الأشـعة $u + v, u - v, u - 2v + w$ مستقلة خطياً .

١٩٦ - ليكن : $f = (1 - i)x + 3i$ و $g = ix - \frac{3}{2}(1 + i)$ حيث $i^2 = -1$. برهن أن f و g مستقلان خطياً على حقل الأعـــداد الحقيقية ، ومرتبطان خطياً على حقل الأعداد المركبة .

١٩٧ - لتكن الأشعة :

$$e_1 = (1, 1, -2, 1) \quad , \quad e_2 = (3, 0, 4, -1) \quad , \quad e_3 = (-1, 2, 5, 2)$$

$$v_1 = (4, -5, 9, -7) \quad , \quad v_2 = (3, 1, -4, 4) \quad , \quad v_3 = (-1, 1, 0, 1)$$

من الفراغ الشعاعي $V_4(R)$.

١ - أوجد الاشعة من v_1, v_2, v_3 المنتمية للفراغ الجزئي من $V_4(R)$ والمولد بالاشعة e_1, e_2, e_3 .

٢ - أوجـــد الاشعة من e_1, e_2, e_3 المنتمية للفراغ الجزئي من $V_4(R)$ والمولد بالاشعة v_1, v_2, v_3 .

١٩٨ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التطبيقات المعرفة R والتي تأخذ قيمتها في R نفسه .

١ - برهن أن أزواج التطبيقات التالية مستقلة خطياً :

$1, x \quad , \quad x ; x^2 \quad , \quad x ; e^x \quad ; \quad x e^x , e^{2x} \quad ; \quad \sin x , \cos x$

* ٢ - برهن أن التطبيقات : $\sin x , \sin 2x , \ldots , \sin nx$ مستقلة خطياً مهما كان $n \geqslant 1$.

الفصل السادس

التطبيقات الخطية

سندرس في هذا الفصل نوعاً هاماً من التطبيقات بين الفراغات الشعاعية وهو الذي يضم ما نسميه بالتطبيقات الخطية ، هذه التطبيقات التي تعتبر م الدعامات الأساسية في الجبر الخطي .

١ - ٦ **تعريف** : ليكن V , W فراغين شعاعيين معرفين على الحة التبديلي K (سيكون كل حقل يرد في هذا البحث تبديلياً إلا إذا ذكر خلاف ذلك) . نقول عن التطبيق :

$$T : V \rightarrow W$$

إنه تطبيق خطي فيما إذا حقق الشرطين التاليين :

$$\forall \vec{v}, \vec{v'} \in V : T(\vec{v} + \vec{v'}) = T(\vec{v}) + T(\vec{v'}) \qquad (1)$$

$$\forall \vec{v} \in V, \forall \lambda \in K : T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \qquad (2)$$

يسمى هذا التطبيق أيضاً تحويلاً خطياً أو مؤثراً خطياً .

إن من الممكن تكرار هاتين العمليتين وضمها إلى بعضها واعتبار العلاقة التالية تعريفاً للتطبيق الخطي :

$$\forall \lambda_i \in K \;,\quad \forall \overrightarrow{v_i} \in V : T\left(\sum_{1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{v_i}\right) = \sum_{1}^{n} \lambda_i f(\overrightarrow{v_i})$$

إن عمليات الجمع الموجودة في الطرف الأيسر من هـذه العلاقة تمثل الجمع المعرف على V أما عمليات الجمع الموجودة في الطرف الأيمن فهي تمثل الجمع المعرف على W .

٢ - ٦ أمثـــلة :

(١) إن التطبيق المطابق I للفراغ الشعاعي V على الحقـــل K المعرف بالعلاقة :

$$\forall \overrightarrow{v} \in V \;:\; I(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$$

هو تطبيق خطي لأن :

$$\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in V ,\quad I(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = I(\overrightarrow{v_1}) + I(\overrightarrow{v_2})$$

$$\forall \overrightarrow{v} \in V ,\quad I(\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} = \lambda\, I(\overrightarrow{v})$$

(٢) إن التطبيق الثابت لفراغ شـعاعي V في الفراغ الشعاعي W ليس بتطبيق خطي :

في الحقيقة إذا كان $\overrightarrow{w_0}$ شعاعاً ثابتاً من W فإننـا نعرف تطبيقاً ثابتاً f لـ V من W بالعلاقة :

$$\forall \overrightarrow{v} \in V \;,\quad f(\overrightarrow{v}) = w_0$$

إن هـذا التطبيق لا يحقق الشرط الأول من شرطي التطبيق الخطي

إذ أن :

$$f(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{w_0}\neq f(\overrightarrow{v_1})+f(\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{w_0}+\overrightarrow{w_0}$$

(٣) إذا طبقنا فراغاً شعاعياً بفراغ شعاعي جزئي منه عدد أبعاده أقل من عدد أبعاد الأول وبحيث نربط كل شعاع من الأول بشعاع من الثاني تقع مركباته ضمن مركبات الأول سمينا هذا التطبيق تطبيق إسقاط.

فلو طبقنا مثلاً الفراغ R^3 بالفراغ R^2 بحيث يكون :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in R \ , \quad f : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$$

فإننا نقول إننا أسقطنا الفراغ R^3 على الفراغ R^2 .

لنبرهن أن مثل هذه التطبيقات خطية :

يمكننا أن نكتب من أجل الخاصة السابقة :

$$f[(x_1, x_2, x_3)+(x_1', x_2', x_3')] = f(x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3')$$

$$= (x_1+x_1', x_2+x_2') = (x_1, x_2)+(x_1', x_2')$$

$$= f(x_1, x_2, x_3)+f(x_1', x_2', x_3')$$

و :

$$f[\lambda(x_1, x_2, x_3)] = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$= \lambda(x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2, x_3)$$

وهذا ما يبرهن أن f تطبيق خطي .

يمكن تعميم ما سبق وبرهان أن تطبيق الفراغ R^n في الفراغ R^p $(p \leqslant n)$ وفق العلاقة :

$$\forall (x_1, x_2, \dots x_n) \in R^n \quad , \quad f[(x_1, x_2, \dots, x_n) = = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

هو تطبيق خطي .

التمثيل التحليلي لتطبيق خطي : سنقصر كلامنا في هذا الموضوع على الفراغات الشعاعية ذات الأبعاد المنتهية .

٣ ـ حساب مركبات الخيال في تطبيق خطي :

ليكن E , F فراغين شعاعيين على الحقل K و f تطبيق خطي لـ E في F ولنفرض أن لـ E القاعدة $A(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ ولـ F القاعدة $B(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_p})$ وليكن $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ شعاعاً من E معرفاً بدلالة مركباته على القاعدة المفروضة أي :

$$\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + \dots + x_n \vec{e_n}$$

إن التطبيق f يربط هذا الشعاع بشعاع $\vec{w}$ من F وفق العلاقة :

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = x_1 f(\vec{e_1}) + x_2 f(\vec{e_2}) + \dots + x_n f(\vec{e_n})$$

يتعين هذا الخيال عندما نتمكن من تعيين مركبات الأشعة :

$$f(\vec{e_1}) , f(\vec{e_2}) , \dots , f(\vec{e_n})$$

من الفراغ F على القاعدة B .

لنفرض :

$$f(\vec{e_i}) = a_i^1 \vec{u_1} + a_i^2 \vec{u_2} + \dots + a_i^p \vec{u_p} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

فنجـــد :

$$f(\overrightarrow{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overrightarrow{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_i^j \overrightarrow{u_j} \right)$$

وإذا ضممنا مختلف العوامل المضروبة بالشعاع u_j إلى بعضها فسوف نجد :

$$f(\overrightarrow{v}) = \sum_{j=1}^{p} \overrightarrow{u_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i \right)$$

يمكن كتابة هذه العلاقة مفصلة بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}) = & (a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n) \overrightarrow{u_1} \\ & + (a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n) \overrightarrow{u_2} \\ & + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ & + (a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \ldots + a_n^p x_n) \overrightarrow{u_p} \end{aligned}$$

إذا فرضنا أن مركبات $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{v})$ على القاعدة B هي $y_1, y_2, \ldots, y_p$ فإننا نستنتج من العلاقة السابقة المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n \\ y_2 &= a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n \\ & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_p &= a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \ldots + a_n^p x_n \end{aligned}$$

تعطي هـــذه الدساتير المركبات على القاعدة B للشعاع $\overrightarrow{f(v)}$ خيال الشعاع $\overrightarrow{v}$ وفق التطبيق الخطي f بتراكيب خطيـة بالنسبة لمركبات $\overrightarrow{v}$ في القاعدة A .

٤ ـ ٦ **الخاصة المميزة لتطبيق خطي** : لقد بينا في الفقرة السابقة أنه يمكن تمثيل كل تطبيق خطي بعلاقات خطية بين مركبات شعاع وخياله وفق هذا التطبيق وسنبرهن فيما يلي أنه إذا عرف التطبيق بعلاقات خطية بين مركبات شعاع من منطلق التطبيق ومركبات خياله وفق هذا التطبيق فان التطبيق المذكور خطي .

لنعتبر أن الفرضيات التي أوردناها في الفقرة السابقة تبقى صالحة من أجل هـــذه الفقرة ولنفرض تطبيقاً f يربط بين كل شعاع $\vec{v}$ من E وشعاع $\vec{w}$ من F بالشكل التالي :

$$f : \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \longrightarrow \vec{w} = \sum_{j=1}^{p} y_j \vec{u_j}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_i{}^j x_i$$

ولنبرهن أن هذا التطبيق خطي أي يحقق العلاقتين (١) و (٢) .

البرهان : من الواضح أن :

$$f(\vec{v}) = \vec{w} = \sum_{j=1}^{p} y_j u_j = \sum_{j=1}^{p} \vec{u_j} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^j x_i \right)$$

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} a_i{}^j \vec{u_j} \right) \qquad (3)$$

لنفرض الأشعة $\vec{q_i}$ من الفراغ F معرفة بالعلاقات :

$$\vec{q_i} = a_i{}^1 \vec{u_1} + a_i{}^2 \vec{u_2} + \dots + a_i{}^p \vec{u_p} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

فنأخذ عندها العلاقة (٣) الشكل :

$$f(\vec{v}) = x_1 \vec{q_1} + x_2 \vec{q_2} + \ldots + x_n \vec{q_n}$$

إن هـــذه العلاقة هي التعريف المعمم للتطبيق الخطي كما ورد في الفقرة [١ - ٦]

نذكر هذه الفقرة والتي سبقتها بقولنا :

إن الشرط اللازم والكافي لأن يكون التطبيق $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً خطياً للفراغ الشعاعي E في الفراغ الشعاعي F هو أن يكون من الممكن تعريف مركبات خيال كل شعاع $\vec{v}$ من E وفق f بعلاقات خطيـــة بدلالة مركبات $\vec{v}$.

خواص التطبيقات الخطية :

إذا كان V و W فراغين شعاعيين على الحقل K وإذا كان $T: V \rightarrow W$ تطبيقاً خطياً فإنه يكون :

٥ - ٦ خيال الشعاع الصفري في V وفق T هو الشعاع الصفري في W لأن :

$$T(\vec{0_v}) = T(0 . \vec{0_v}) = 0 . T(\vec{0_v}) = \vec{0_w}$$

حيث $\vec{0_v}$ و $\vec{0_w}$ شعاعا الصفر في V و W على الترتيب و 0 هو الصفر في K .

٦ - ٦ خيال نظير شعاع وفق T هو نظير خيال هـذا الشعاع . لأنه إذا كان $\vec{-v}$ نظير الشعاع $\vec{v}$ من V أي $\vec{v} + (\vec{-v}) = \vec{0_v}$ فإن :

$$T(\vec{v}+(-\vec{v}))=T(\vec{0}_v)=\vec{0}_w$$

ومن جهة ثانية فإن :

$$T(\vec{v}+(-\vec{v}))=T(\vec{v})+T(-\vec{v})$$

ومنه :

$$T(\vec{v})+T(-\vec{v})=\vec{0}_w$$

أي أن $T(-\vec{v})$ هو نظير $T(\vec{v})$ من W .

ملاحظة : نهمل في الحالات التي لا نخشى فيها التباساً ، الدليل من شعاع الصفر لفراغ شعاعي .

٧ - ٦ إذا كان U فراغاً شعاعياً جزئياً من V فان T(U) خيال **U** وفق T والمعرف بالدستور :

$T(U)=\{T(\vec{v}) \ : \ \vec{v}\in U\}$ ، فراغ شعاعي جزئي من W .

بما أن U يحوي الشعاع الصفري وفق النظرية [٧ - ٥] فإن T(U) يحوي حسب [٥ - ٦] الشعاع الصفري . إذن للبرهان على أن T(U) فراغ شعاعي جزئي من W يكفي أن نتحقق من الخاصتين التاليتين وفق [٧ - ٥] :

$$\forall\ \vec{w},\vec{w}'\in T(U) \quad , \quad \vec{w}+\vec{w}'\in T(U)$$

$$\forall\ \lambda\in K \qquad , \quad \lambda\vec{w}\in T(U)$$

لنأخذ $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ من U ولنفرض أن $T(\vec{v})=\vec{w}$ و $T(\vec{v}')=\vec{w}'$.

بما أن $\vec{v} + \vec{v'} \in U$ فإن :

$$T(\vec{v} + \vec{v'}) \in T(U)$$

$$T(\vec{v} + \vec{v'}) = T(\vec{v}) + T(\vec{v'}) = \vec{w} + \vec{w'}$$

وهذا يعني :

$$T(\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{w} + \vec{w'} \in T(U)$$

مهما كان λ من K فإن $\lambda \vec{v} \in U$ وهـــذا يؤدي إلى أن : $T(\lambda \vec{v}) \in T(U)$

$$T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda \vec{w}$$

وهذا يعني أن : $T(\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{w} \in T(U)$ وهو المطلوب .

ينتج عما سبق أن T(V) فراغ شعاعي جزئي من W . ويسمى عادة خيال V وفق التطبيق الخطي T . ونسمي عدد أبعاد T(V) رتبـــة التطبيق الخطي T .

٨ - ٦ أمثلة :

(١) إن R^2 هو خيال التطبيق الخطي $T : R^2 \to R^2$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

وذلك لأن T غامر ، وبالتالي تكون رتبـــة التطبيق الخطي T هي اثنان .

(٢) إن R هو خيال التطبيق الخطي $T : R^2 \to R$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)$$

وبالتالي فان رتبة التطبيق الخطي T هي واحد .

٩ - ٦ ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . لتكن $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ مجموعة أشعة من V . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً وكان $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_m)$ مجموعـــة أشعة مستقلة خطياً من W فان مجموعة الأشعة $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ من V مستقلة خطياً .

إن الشرط اللازم والكافي لتكون $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ مستقلة خطياً هو أن تتحقق العلاقة :

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_m \vec{v}_m = \vec{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$$

حيث $a_1, \ldots, a_m \in K$. في الحقيقة استناداً إلى [٥ - ٦] نجد :

$$T(a_1 \vec{v}_1 + \ldots + a_m \vec{v}_m) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

وبما أن T تطبيق خطي فان الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة يكتب بالشكل :

$$a_1 T(\vec{v}_1) + \ldots + a_m T(\vec{v}_m) = \vec{0}$$

وبمـــا أننا فرضنا $T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_m)$ مستقلة خطياً فان العلاقة الأخيرة تقتضي $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$ وهو المطلوب .

(إن عكس هذه الخاصة معطى بالتمرين المحلول ٢٠٦) .

نحن الآن في وضع يمكننا من برهان النظرية التالية :

١٠ - ٦ **نظرية** : ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K .
إذا كانت ($\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$) قاعدة في V وإذا كانت $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_n}$ مجموعة جزئية من W فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $T : V \to W$ بحيث يكون :

$$T(\vec{e_i}) = \vec{w_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

البرهان : لنبرهن أولاً وجـــود تطبيق خطي T يحقق العلاقات $T(\vec{e_i}) = w_i$. إن من المعروف أنه يمكن كتابة كل شعاع v من V بشكل تركيب خطي وحيد بالنسبة لعناصر قاعدة V أي يوجد n عنصراً $a_1, \ldots, a_n$ من K وبشكل وحيد بحيث يكون :

$$\vec{v} = a_1 \vec{e_1} + \ldots + a_n \vec{e_n}$$

لنعرف تطبيقاً T يربط بين الشعاع $\vec{v}$، والشعاع $\overrightarrow{T(v)}$ من W حيث :

$$T(\vec{v}) = a_1 \vec{w_1} + \ldots + a_n \vec{w_n} \qquad (1)$$

تعرف هذه العلاقة T تطبيقاً من V إلى W لأنها تقابل كل عنصر $\vec{v}$ من V بعنصر وحيد $\overrightarrow{T(v)}$ من W . ومن الواضح أن :

$$T(\vec{e_i}) = \vec{w_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

لاثبات أن T هذا تطبيق خطي ، نأخذ الشعاع : $\vec{u} = b_1 \vec{e_1} + \ldots + b_n \vec{e_n}$ من V فيكون وفق تعريف الفراغ الشعاعي :

$$\vec{v} + \vec{u} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + \ldots + (a_n + b_n)\vec{e_n}$$

ومنه :

$$T(\vec{v}+\vec{u}) = (a_1+b_1)\vec{w}_1 + \ldots + (a_n+b_n)\vec{w}_n$$

$$= a_1\vec{w}_1 + \ldots + a_n\vec{w}_n + b_1\vec{w}_1 + \ldots + b_n\vec{w}_n$$

$$= T(\vec{v}) + T(\vec{u})$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$\lambda\vec{v} = \lambda a_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda a_n\vec{e}_n$$

ومنه :

$$T(\lambda\vec{v}) = \lambda a_1\vec{w}_1 + \ldots + \lambda a_n\vec{w}_n$$

$$= \lambda(a_1\vec{w}_1 + \ldots + a_n\vec{w}_n)$$

$$= \lambda T(\vec{v})$$

وبذلك نكون قد برهنا أن T تطبيق خطي . بقي علينا أن نبرهن أن التطبيق الخطي T المعرف بالعلاقة (١) وحيد . من أجل هذا لنفرض أنه يوجد تطبيق خطي آخر F من الشكل :

$$F(\vec{e}_i) = \vec{w}_i \qquad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

فيكون :

$$\forall \vec{v} \in V \quad , \quad F(\vec{v}) = F(a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n)$$

$$= a_1 F(\vec{e}_1) + \ldots + a_n F(\vec{e}_n)$$

$$= a_1\vec{w}_1 + \ldots + a_n\vec{w}_n = T(\vec{v})$$

إذن $T(\vec{v}) = F(\vec{v})$ مهما كان $\vec{v}$ من V وهـذا مايثبت ان F هو T نفسه أي أن التطبيق الخطي T وحيد وهذا مايثبت صحة النظرية .

نواة تطبيق خطي :

ليكن V و W فراغين شعاعين على الحقل التبديلي K وليكن التطبيق $T : V \to W$. نسمي مجموعة الأشعة $\vec{v}$ من W التي تحقق $T(\vec{v}) = \vec{0}$ نواة التطبيق الخطي T . نرمز للنواة هذه بـ $T^{-1}(\vec{0})$ أو Ker T :

$$Ker\ T = \{ \vec{v} \in V \ : \ T(\vec{v}) = \vec{0} \}$$

تتمتع نواة تطبيق خطي $T : V \to W$ بالخاصة التالية :

١١ - ٦ نظرية : Ker T نواة التطبيق الخطي T فراغ شعاعي جزئي من V .

البرهان : أولاً - تحوي Ker T الشـعاع الصفري وذلك لأن خيال الشعاع الصفري وفق تطبيق خطي هو الشعاع الصفري . إذن لاثبات أن Ker T فراغ شعاعي جزئي من V يجب أن نتحقق من الخاصتين التاليتين :

$$\forall\ \vec{v}, \vec{v'} \in Ker\ T \ \Rightarrow \ \vec{v} + \vec{v'} \in Ker\ T$$

$$\forall\ \lambda \in K\ ,\ \vec{v} \in Ker\ T \ \Rightarrow \ \lambda \vec{v} \in Ker\ T$$

إذا كان $\vec{v}$ و $\vec{v'}$ من Ker T فان :

$$T(\vec{v} + \vec{v'}) = T(\vec{v}) + T(\vec{v'})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

إذن : $v + v' \in \text{Ker } T$

وإذا كان : $\lambda \in K$ و $\vec{v} \in \text{Ker} T$ فان :

$$T(\lambda \vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) = \lambda . \vec{0} = \vec{0}$$

إذن $\lambda \vec{v} \in \text{Ker} T$ وبذلك يثبت المطلوب .

١٢ - ٦ نظرية : ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K ولنفرض أن عدد أبعاد كل من هذين الفراغين الشعاعيين محدود . ليكن T تطبيقاً خطياً لـ V في W . إن مجموع عدد أبعاد خيال V (رتبة التطبيق) مع عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V (انظر التمرين [٢١٦]) .

١٣ - ٦ أمثلة :

(١) إذا كان I التطبيق الخطي المطابق $I : V \rightarrow V$ فإنه :

$$\forall \vec{v} \in V \quad , \quad I(\vec{v}) = \vec{v}$$

إن نواة هذا التطبيق الخطي تتألف من الشعاع الصفري فقط وبالتالي فان عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي الصفر .

(٢) إذا رمزنا بـ O للتطبيق المعدوم $O : V \rightarrow V$ أي :

$$\forall \vec{v} \in V \quad , \quad O(\vec{v}) = \vec{0}$$

فإن هذا التطبيق خطي وإن نواته هي الفراغ الشعاعي V كله وبالتالي فإن عدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V .

(٣) إذا كان $T : R^2 \to R^2$ التطبيق الخطي المعرف بالعلاقة :

$$T(x, y) = (x, x + y)$$

حيث (x, y) مركبتا شعاع ما $\vec{v}$ من R^2 بالنسبة لقاعدة مفروضة فإن نواة هـذا التطبيق تتألف من الأشعة $\vec{v}$ من R^2 حيث يكون $x = 0$ و $x + y = 0$ أي $x = 0$ و $y = 0$ وبالتالي فإن نواة هـذا التطبيق تتألف من الشعاع الصفري فقط ، إذن عـدد أبعاد نواة هذا التطبيق يساوي الصفر .

(٤) ليكن V الفراغ الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق (لماذا ؟) . إذا كان $D : V \to V$ التطبيق المعرف بعملية الاشتقاق ، فإن D تطبيق خطي (لماذا ؟) وأن Ker D نواة هـذا التطبيق الخطي تتألف من جميع التوابع الثابتة . إن كل تابعين ثابتين من الشكل $f(x) = \alpha$ و $g(x) = \beta$ حيث α و β من R ومهما كانت x من R ، مرتبطان خطياً لأن $\beta f(x) - \alpha g(x) = 0$. إذن مجموعة التوابع الثابتة تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V ذا بعد واحد وبالتالي فإن عدد أبعاد نواة التطبيق الخطي **D** يساوي الواحد .

١٤ - ٦ تعريف : نقول عن تطبيق خطي أنه تطبيق خطي منتظم إذا كان متبايناً وغامراً أي إذا كان تقابلاً .

١٥ - ٦ نظرية : إذا كان V و W فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K وكان لهما العدد المحدود ذاته من الأبعاد فإن الشرط اللازم والكافي ليكون التطبيق الخطي $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً منتظماً هو أن

تكون $Ker\,T$ نواة التطبيق الخطي T مؤلفة من عنصر وحيد هو الشعاع الصفري من V .

البرهان :

لزوم الشرط : T تطبيق خطي منتظم $\Leftarrow Ker\,T = \{\vec{0}\}$

لنفرض وجود شعاع $\vec{v}$ غير الشعاع الصفري في $Ker\,T$ ، فيكون $T(\vec{v}) = \vec{0}$. بما أن خيال الشعاع الصفري وفق تطبيق خطي هو الشعاع الصفري فان :

$$T(\vec{v}) = T(\vec{0}) = \vec{0}$$

نستنتج من هذه العلاقة واستناداً لكون التطبيق الخطي T متبايناً أن $\vec{v} = \vec{0}$ وهذا مخالف للفرض . إذن : $Ker\,T = \vec{0}$.

كفاية الشرط : $Ker\,T = \{0\} \Leftarrow T$ تطبيق منتظم .

بما أن للفراغين الشعاعيين V و W العدد ذاته من الأبعاد فيكفي أن نبرهن أن T تطبيق خطي متبـــاين . أي أن نبرهن أنه إذا كان $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ فإن $T(\vec{v}_1) \neq T(\vec{v}_2)$ حيث $\vec{v}_1 , \vec{v}_2 \in V$. لنفرض أن : $T(\vec{v}_1) = T(\vec{v}_2)$ فنجد أن :

$$T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) \Rightarrow T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$$

أي أن :

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in Ker\,T = \{\vec{0}\}$$

وبالتالي فإن $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$ وهذا خلاف الفرض $\overrightarrow{v_1} \neq \overrightarrow{v_2}$. إذن يجب أن يكون $T(\overrightarrow{v_1}) \neq T(\overrightarrow{v_2})$ وبذلك يتم المطلوب .

إن التطبيق الخطي المعطى بالمثال (١) من [١٣ - ٥] هو تطبيق خطي منتظم لـ V على V ذاته ، وكذلك فإن التطبيق الخطي المعطى بالمثال (٣) هو أيضاً تطبيق خطي منتظم لـ R^2 على R^2 نفسه ، أما التطبيق الخطي المعطى بالمثال (٢) فليس تطبيقاً خطياً منتظماً .

١٣ - ٦ **نظرية** : إذا كان T تطبيقاً خطياً منتظماً لـ V على W فإن التطبيق العاكس $T^{-1} : W \longrightarrow V$ هو تطبيق خطي أيضاً .

البرهان : إن من المعلوم أن T^{-1} تطبيق لأنه العلاقة العاكسة لتقابل ولاثبات أن T^{-1} تطبيق خطي نأخذ شعاعين كيفيين $\overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_1}$ من W وبما أن T تطبيق خطي منتظم فيوجد شعاعان $\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}$ من V بحيث يكون :

$$T(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{w_1} \quad , \quad T(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{w_2}$$

ومنه :

$$T^{-1}(\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) = T^{-1}(T(\overrightarrow{v_1}) + T(\overrightarrow{v_2}))$$

$$= T^{-1}(T(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})) \qquad \text{(T تطبيق خطي)}$$

$$= \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \qquad \text{(} T^{-1} \circ T = I \text{ التطبيق المطابق)}$$

$$= T^{-1}(\overrightarrow{w_1}) + T^{-1}(\overrightarrow{w_2})$$

ونجد كذلك من أجل كل $\lambda \in K$:

$$T^{-1}(\lambda \vec{w_1}) = T^{-1}(\lambda T(\vec{v_1}))$$

$$= T^{-1}(T(\lambda \vec{v_1}))$$ (T تطبيق خطي)

$$= \lambda \vec{v_1}$$

$$= \lambda T^{-1}(\vec{w_1})$$

وهذا يثبت أن T^{-1} تطبيق خطي .

تركيب التطبيقات الخطية :

١٧ - ٦ نظرية . لتكن V و U و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل K وليكن T تطبيقاً خطياً من V إلى U و F تطبيقاً خطياً من U إلى W . إن التطبيق المركب $F \circ T$ هو تطبيق خطي من V إلى W .

البرهان : إذا كان $\vec{v}, \vec{v'} \in V$ فان :

$$(F \circ T)(\vec{v} + \vec{v'}) = F(T(\vec{v} + \vec{v'}))$$

$$= F(T(\vec{v}) + T(\vec{v'}))$$ (T تطبيق خطي)

$$= (F \circ T)(\vec{v}) + (F \circ T)(\vec{v'})$$ (F تطبيق خطي)

وإذا كان $\lambda \in K$ فان :

$$(F \circ T)(\lambda \vec{v}) = F(T(\lambda \vec{v}))$$

$$= F(\lambda T(\vec{v}))$$ (T تطبيق خطي)

$$= \lambda (F \circ T)(\vec{v})$$ (F تطبيق خطي)

وبالتالي فان $F \circ T$ تطبيق خطي وهو المطلوب .

١٨ - ٦ **مثال** : ليكن T و F تطبيقين خطيين من R^3 إلى R^3 معرفين بالشكل :

$$T(x, y, z) = (x, z, 0)$$

$$F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

حيث (x, y, z) تمثل مركبات شعاع ما من R^3 .

إن التطبيق المركب $F \circ T$ يعطى بالعلاقة :

$$(F \circ T)(x, y, z) = F(T(x, y, z)) = F(x, z, 0)$$
$$= (x, z, 0)$$

وإن التطبيق المركب $T \circ F$ يعطى بالعلاقة :

$$(T \circ F)(x, y, z) = T(F(x, y, z)) = T(x, y, 0)$$
$$= (x, 0, 0)$$

وهذا مايذكرنا بأن تركيب التطبيقات غير تبديلي .

فراغ التطبيقات الخطية :

تتصف مجموعة التطبيقات الخطية من فراغ شعاعي V إلى فراغ شعاعي W ، معرفين على الحقل K ، بخاصة أساسية هامة هي أن لها بنية الفراغ الشعاعي . وأكثر من هذا ، تتصف مجموعـــة التطبيقات الخطية من فراغ شعاعي V إلى الفراغ V نفسه ببنية جبرية إضافية إذ أنه يعرف على مجموعة التطبيقات الخطية عملية ضرب سنأتي على ذكرها بعد قليل .

لنرمز بـ $Hom(V, W)$ لمجموعـــة التطبيقات الخطية من الفراغ الشعاعي V إلى الفراغ الشعاعي W المعرفين على الحقل التبديلي K . إذا كان $T, F \in Hom(V, W)$ فإن التطبيق $T + F$ المعرف بالعلاقة :

$$(I) \qquad (T + F)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + F(\vec{v}) \; , \; \forall \vec{v} \in V$$

تطبيق خطي من V إلى W وبالتالي ينتمي لـ $Hom(V, W)$ لأنه إذا كان $\vec{v}, \vec{v'} \in V$ فإن :

$$\begin{aligned}(T + F)(\vec{v} + \vec{v'}) &= T(\vec{v} + \vec{v'}) + F(\vec{v} + \vec{v'}) \\ &= T(\vec{v}) + T(\vec{v'}) + F(\vec{v}) + F(\vec{v'}) \\ &= T(\vec{v}) + F(\vec{v}) + T(\vec{v'}) + F(\vec{v'}) \\ &= (T + F)(\vec{v}) + (T + F)(\vec{v'})\end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda \in K$ فإن :

$$\begin{aligned}(T + F)(\lambda \vec{v}) &= T(\lambda \vec{v}) + F(\lambda \vec{v}) \\ &= \lambda T(\vec{v}) + \lambda F(\vec{v}) \\ &= \lambda (T + F)(\vec{v})\end{aligned}$$

ونكون قد برهنا أن $T + F$ تطبيق خطي من V إلى W .

وإذا كان $\lambda \in K$ فإنه يبرهن بسهولة أن التطبيق λT المعرف بالعلاقة

$$(II) \qquad (\lambda T)(\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \; , \; \forall \vec{v} \in V$$

هو تطبيق خطي من V الى W . وبهذا نكون قـــد عرفنـا على Hom (V , W) ، مجموعـــة التطبيقات الخطية من V الى W ، عملية داخلية هي الجمع التي رمزنا لها تجاوزاً بـ + ، كما عرفنا عملية خارجية هي الضرب بعنصر من الحقـــل K . واذا اعتـــبرنا العنصر الصفري في Hom (V , W) هو التطبيق المعدوم فإنه يمكن بسهولة (أو استناداً إلى [٢ - ٥] والتمرين المحلول [١٥٧]) برهان النظرية التالية :

١٩ - ٦ نظرية : تشكل المجموعة Hom (V , W) المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعنصر من الحقل K المعرفتين بالمعادلتـــين (I) و (II) ، فراغاً شعاعياً على الحقل K ، ندعوه فراغ التطبيقات الخطية .

سنذكر فيما يلي حالتين خاصتين من فراغ التطبيقات الخطية . الأولى Hom (V(R) , R) والثانية Hom (V , V) .

بما أن الحقل التبديلي R ، استناداً إلى المثال (١) من [٣ - ٥] ، هو الفراغ الشعاعي $V_1(R)$ ذاته فإنه يمكننا أن نكتب الفراغ الشعاعي Hom (V(R) , $V_1(R)$) بالشكل Hom (V(R) , R) ، ويمثـــل الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التطبيقات الخطية من الفراغ الشعاعي V على R إلى الفراغ الشعاعي R .

٢٠ - ٦ تعريف : نسمي الفراغ الشـعاعي Hom (V(R) , R) الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V . ويرمز عادة لهذا الفراغ بـ V^* .

٢١ - ٦ نظرية : إذا كان عـــدد أبعاد الفراغ الشعاعي V(R) محدوداً ويساوي n فان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الثنوي V^* يسـاوي أيضاً n (انظر التمرين ٢٢٢) .

القاعدة الثنوية لفراغ شعاعي :

إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي $V(R)$ يساوي n فإن هناك n شعاعاً مستقلاً $v_1 , \ldots , v_n$ من $V(R)$ تشكل قاعدة فيه نرمز لها بـ $\{ v_i \}$. لتكن $v_1^* , \ldots , v_n^*$ جملة أشعة مستقلة خطياً من V^* ، الفراغ الشعاعي الثنوي (أو المرافق) ، بحيث تحقق العلاقات :

$$(III) \qquad v_i^* (v_j) = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$i , j = 1 , \ldots , n$$

إن v_i^* تطبيقات خطية من V إلى R ، أما $v_i^*(v_j)$ فهو خيال الشعاع v_j من $V(R)$ وفق التطبيق v_i^* . تشكل جملة الأشعة $v_1^* , \ldots , v_n^*$ استناداً إلى [٢١ - ٦] ، قاعدة في V^* . نرمز لهذه القاعدة بالشكل $\{ v_i^* \}$ ونسميها القاعدة الثنوية أو المرافقة في V^* للقاعدة $\{ v_i \}$ في V .

٢٢ - ٦ نظرية : ليكن V , W فراغين شعاعيين على الحقل R . إذا كان $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً فان التطبيق $T^* : W^* \longrightarrow V^*$ المعرف بالعلاقة :

$$\forall g \in W^* \quad , \quad T^*(g) = g \circ T$$

تطبيق خطي . حيث $g \in W^*$ هو تطبيـق خطي من W إلى R و $g \circ T$ هو التطبيق المركب وهو تطبيق خطي من V الى R أي عنصر من V^* (انظر التمرين ٢٢٤) .

نسمي التطبيق T^* المعرف بالنظرية السابقة منقول التطبيق الخطي T

* الفراغ الشعاعي Hom (V , V) :

ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل التبديلي K . ان Hom (V , V) مجموعة التطبيقات الخطية من V الى V ذاته تشكل ، كما برهنا ، فراغاً شعاعياً على الحقل K . نسمي كل عنصر من الفراغ الشعاعي Hom(V , V) مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V وإن دراسة المؤثرات على فراغ شعاعي تحتل مكاناً هاماً في أبحاث الجبر الخطي العالية .

إن التطبيق الخطي D المعرف بعملية الاشتقاق المعطى بالمثال (٤) [١٣ - ٦] مؤثر خطي على الفراغ الشعاعي المؤلف من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق . يدعى هذا المؤثر المؤثر التفاضلي .

ان تركيب تطبيقين خطيين من V الى V ، كما رأينا ، هو تطبيق خطي وبالتالي فان عملية التركيب « o » هذه تعرف عملية « ضرب » نرمز لها بـ (.) على الفراغ الشعاعي Hom (V , V) من الشكل :

$$(IV) \qquad \forall F , T \in Hom (V , V) \quad : \quad F . T = F \circ T$$

تتمتع عملية الضرب هذه بالخواص التالية :

٢٣ - ٦ عملية الضرب عملية تجميعية وذلك لكون عملية تركيب التطبيقات تجميعية . ولكنها في الحالة العامة ليست تبديلية . انظر المثال [١٨ - ٦] .

٢٤ - ٦ اذا كان T مؤثراً خطياً على V فيرمز عادة بـ :

$T^2 = T . T$ و $T^3 = T . T . T$ وهكذا . كما يرمز أيضـــاً بـ $T^0 = I$ التطبيق المطابق والذي ندعوه المؤثر الحيادي ، ويكون :

$$\forall T \in \text{Hom}(V, V) \quad : \quad T^0 . T = T . T^0 = T$$

٢٥ - ٦ مهما كانت F , T_1 , T_2 من $\text{Hom}(V, V)$ فان :

$$F . (T_1 + T_2) = F . T_1 + F . T_2$$

$$(T_1 + T_2) . F = T_1 . F + T_2 . F$$

أي أن عملية الضرب المعرفة آنفاً توزيعية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة على مجموعة التطبيقات ، لأنه مهما كان الشعاع $\vec{v}$ من V فان :

$$(F . (T_1 + T_2)) (\vec{v}) = F ((T_1 + T_2) (\vec{v}))$$

$$= F (T_1 (\vec{v}) + T_2(\vec{v}))$$

$$= F(T_1(\vec{v})) + F(T_2(\vec{v}))$$ (F تطبيق خطي).

$$= (F . T_1) (\vec{v}) + (F . T_2) (\vec{v})$$

$$= (F . T_1 + F . T_2) (\vec{v})$$

ومنـــه :

$$F . (T_1 + T_2) = F . T_1 + F . T_2$$

ونحصل بصورة مشابهة ، على العلاقة الثانية .

٢٦ - ٦ مهما كان λ من K ومهما كان F , T من $\text{Hom}(V, V)$ فإن :

$$\lambda (F . T) = (\lambda F) . T = F . (\lambda T)$$

لأنه مهما كان الشعاع $\vec{v}$ من V فإن :

$$(\lambda (F . T))(\vec{v}) = \lambda (F (T(\vec{v})))$$

$$= (\lambda F)(T(\vec{v})) = ((\lambda F) . T)(\vec{v})$$

$$= F(\lambda T(\vec{v})) \quad (\text{F تطبيق خطي})$$

$$= (F . (\lambda T))(\vec{v})$$

ومنه نجد العلاقة المطلوبة .

نستنتج مما سبق مايلي :

(١) إن الخواص [٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ - ٦] تعرف الفراغ الشعاعي Hom (V , V) كحلقة واحدية (ذات عنصر حيادي) . بينما الخاصة [٢٦ - ٦] تجعل من Hom (V , V) فراغاً شعاعياً بالاضافة الى كونه حلقة .نسمي Hom (V , V) المزود بهذه العمليات جبراً على الحقل K(*) .

(٢) إن مجموعـــة المؤثرات الخطية المنتظمة على الفراغ الشعاعي أي مجموعة التطبيقات الخطية المنتظمة من V على V ذاته ، تشـــكل فراغاً شعاعياً جزئياً من Hom (V , V) (لماذا ؟) . أضف الى ذلك أن

(*) نقول عن حلقه S أنها تشكل جبراً على الحقل K إذا كانت S فراغاً شعاعياً على الحقل K وكان :

$$\forall u, v \in S \;,\; \forall \lambda \in K \;,\; \lambda (u v) = (\lambda u) v = u (\lambda v)$$

هذه المجموعة التي أنشئت عليها عملية الضرب المعرفة بالعلاقة (IV) تشكل زمرة غير تبديلية في الحالة العـامة وأن العنصر النظير لكل مؤثر خطي منتظم T هو المؤثر الخطي المعاكس T^{-1} .

تمارين محلولة

١٩٩ - تمرين : لتكن $(v_1, \ldots, v_n)$ [1] قاعدة في الفراغ الشعاعي V المعرف على الحقل K . ليكن $v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$ شعاعاً ما من V ، حيث $k_1, \ldots, k_n \in K$ ولنعرف التطبيق $T : V \to K^n$ بالشكل :

$$T(v) = (k_1, \ldots, k_n)$$

حيث K^n الفراغ الشعاعي $V_n(K)$. برهن أن T تطبيق خطي

الحل : لنتحقق من شرطي التطبيق الخطي . إذا كان :

$$v' = k_1' v_1 + \ldots + k_n' v_n \quad , \quad k_1', \ldots, k_n' \in K$$

فإن :

$$v + v' = (k_1 + k_1') v_1 + \ldots + (k_n + k_n') v_n$$

وبالتالي :

$$\begin{aligned} T(v + v') &= (k_1 + k_1', \ldots, k_n + k_n') \\ &= (k_1, \ldots, k_n) + (k_1', \ldots, k_n') \\ &= T(v) + T(v') \end{aligned}$$

---

(١) نذكر القارىء بما أوردناه سابقاً من أننا سنرمز للأشعة بأحرف لاتينية وللمقادير السلمية بأحرف يونانية لذا سنهمل في هذه التمارين الأسهم من فوق الأحرف الدالة على أشعة .

أي الشرط الأول محقق .

ومن أجل $\lambda \in K$ فان :

$$\lambda v = \lambda (k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = \lambda (k_1 v_1) + \dots + \lambda (k_n v_n) =$$
$$= ((\lambda k_1) v_1 + \dots (\lambda k_n) v_n)$$

ومنه :

$$T(\lambda v) = (\lambda k_1, \dots, \lambda k_n)$$
$$= \lambda (k_1, \dots, k_n)$$
$$= \lambda T(v)$$

أي الشرط الثاني محقق وهو المطلوب .

٢٠٠ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً . برهن أن خيال مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من V هو مجموعة أشعة مرتبطة من W .

الحل : إذا كانت $v_1, \dots, v_n$ مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من V فيوجد $a_1, \dots, a_n$ من K ليست جميعها معدومة بحيث يكون :

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

ومنه :

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = T(0) = 0$$

وبما أن T تطبيق خطي فان :

$$a_1 T(v_1) + \dots a_n T(v_n) = 0$$

وهذا يعني أن $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ مجموعة أشعة مرتبطة خطياً من W .

٢٠١ - ليكن $T: V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً . إذا كان عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V هو n فبرهن أن عـــدد أبعاد $T(V)$ هو أصغر أو يساوي n .

الحل : لتكن $w_1, \ldots, w_m$ مجموعة أشعة من $T(V)$ ، يوجد مجموعة أشعة $a_1, \ldots, a_m$ من V بحيث يكون :

$$T(a_i) = w_i \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

إذا كان عدد أبعاد $T(V)$ أكبر من n فيمكن اختيار m أكبر من n بحيث تكون مجموعة الأشعة $w_1, \ldots, w_m$ مستقلة خطياً . عندها نجد استناداً الى الخاصة [٥ - ٣] من خواص التطبيق الخطي أن $a_1, \ldots, a_m$ مستقلة خطياً . وهذا يعني أن عدد أبعاد V اكبر من n وهـذا مخالف للفرض . وبالتالي يجب أن تكون $m \leqslant n$ وهو المطلوب .

ملاحظة : نستنتج من التمرين الســـابق أن رتبه تطبيق خطي $T: V \longrightarrow W$ تساوي على الأكثر عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V .

٢٠٢ - ليكن A شـــعاعاً مفروضاً من R^3 . نعرف التطبيق $T: R^3 \longrightarrow R$ بالعلاقة :

$$T(v) = v \,.\, A \qquad (\forall v \in R^3)$$

حيث . تدل على عملية الضرب الداخلي (العددي) للشعاعين v و A برهن أن T تطبيق خطي .

الحل : إذا كان $v , v' \in R^3$ فإن :

$$T(v + v') = (v + v') . A$$

$= v . A + v' . A$ (حسب خواص الجداء الداخلي)

$= T(v) + T(v')$

وكذلك إذا كان $\alpha \in R$ فان :

$$T(\alpha v) = (\alpha v) . A$$

$= \alpha (v . A)$ (حسب خواص الجداء الداخلي)

$= \alpha T(v)$

وبالتالي فان T خطي .

٢٠٣ - ليكن الفراغ الشعاعي V على الحقل R اذا كان f , g تطبيقين خطيين $f , g : V \longrightarrow R$ فبرهن أن التطبيق $F : V \longrightarrow R^2$ المعطى بالعلاقة $F(v) = (f(v) \; , \; g(v)) \; , \; \forall v \in V$ هو تطبيق خطي .

الحل : مهما كان $v' \in V$ و v فلدينا .

$$F(v + v') = (f(v + v') \; , \; g(v + v'))$$

$= (f(v) + f(v') \; , \; g(v) + g(v'))$ (g , f تطبيقان خطيان)

$= (f(v) \; , \; g(v)) + (f(v') \; , \; g(v'))$ (جمع الأشعة)

$= F(v) + F(v')$

وكذلك مهما كان $\alpha \in R$ فان :

$$F(\alpha v) = (f(\alpha v) \; , \; g(\alpha v))$$

(g , f تطبيقان خطيان) $= (\alpha f(v), \alpha g(v))$

(ضرب شعاع بعدد) $= \alpha (f(v), g(v))$

$= \alpha F(v)$

وبذلك يتم المطلوب .

٢٠٤ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق . إذا كان D المؤثر التفاضلي على V و I التطبيق المطابق على V فبرهن أن التطبيق $T = D - I : V \longrightarrow V$ هو تطبيق خطي . أوجد نواة ورتبة هذا التطبيق .

الحل : لاثبات أن T خطي نأخذ $a, u \in V$ فنجد :

$$T(a+u) = (D-I)(a+u)$$

(حسب تعريف مجموع تابعين) $= D(a+u) - I(a+u)$

(حسب خواص مشتق تابعين) $= D(a) + D(u) - I(a) - I(u)$

(عملية جمع التوابع تبديلية وتجميعية) $= [D(a) - I(a)] + [D(u) - I(u)]$

$= T(a) + T(u)$

وبصورة مشابهة نجد أنه إذا كان $\alpha \in R$ فان :

$$T(\alpha a) = \alpha T(a)$$

وبالتالي فان التطبيق T خطي وهو المطلوب .

إن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker } T = \{ f \in V \ : \ T(f) = O \}$$

$$(D - I)(f) = O \Rightarrow Df - If = O$$

$$\Rightarrow Df = If + O = f + O = f$$

وحل المعادلة التفاضلية الحاصلة $Df = f$ هو من الشكل :

$$f(x) = e^x + \lambda$$

حيث λ ثابت اختياري .

تشكل مجموعة هـــذه التوابع نواة التطبيق الخطي T ، وهي فراغ شعاعي جزئي من V ذو بعد يساوي 1 . رتبة التطبيق الخطي T إذن تساوي الواحد .

٢٠٥ - لنفترض أن الشعاعين e_1, e_2 يشكلان قاعـدة في R^2 . وليكن $T : R^2 \longrightarrow R^n$ تطبيقاً خطيـــاً . برهن أنه إما أن يكون $T(e_1)$, $T(e_2)$ مستقلين خطياً أو أن يكون عدد أبعاد $T(R^2)$ يســاوي الواحد أو الصفر .

الحل : إن الشعاعين e_1, e_2 مستقلان خطياً لكونهما يشكلان قاعدة في R^2 . فلدينا إحدى الحالات الثلاث التالية :

١ - $T(e_1)$ و $T(e_2)$ مستقلان خطياً وبالتالي يولدان $T(R^2)$ لأن ، حسب التمرين [٢٠١] ، عدد أبعاد $T(R^2)$ يساوي 2 على الأكثر ، وفي هذه الحالة يساوي اثنين .

٢ - $T(e_1)$ و $T(e_2)$ مرتبطان خطياً ، عندها يوجد عدد $\lambda \neq 0$ بحيث يكون $T(e_2) = \lambda T(e_1)$. إذا كان $v \in R^2$ فيوجد عـــددان α , β بحيث يكون $v = \alpha e_1 + \beta e_2$. ومنه :

$$T(v) = T(\alpha e_1 + \beta e_2)$$

(T تطبيق خطي)

$$T(v) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2)$$
$$= (\alpha + \beta \lambda) T(e_1)$$

أي أن كل شعاع من $T(R^2)$ يمكن كتابته بدلالة الشعاع $T(e_1)$ ، وبالتالي فإن عدد أبعاد $T(R^2)$ يساوي الواحد .

٣ - $T(e_1)$, $T(e_1)$ يساويان شعاع الصفر . إن كل شعاع من $T(R^2)$ هو الشعاع الصفر وبالتالي فإن $T(R^2) = \{0\}$ وعدد أبعاده يساوي الصفر .

٢٠٦ - (عكس الخاصة ٩-٦) .

ليكن V و W فراغين شعاعين على الحقل K وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً نواته $\{0\}$. إذا كانت $v_1 , \ldots , v_n$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من V فان $T(v_1) , \ldots , T(v_n)$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً من W .

الحل : لما كان T تطبيقاً خطياً فان :

$$\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n)$$

وبالتالي فإن :

$$\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = 0 \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \quad (\text{Ker } T = \{0\} \text{ لأن})$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

لأن الأشعة $v_1 , \ldots , v_n$ مستقلة خطياً . وهو المطلوب .

٢٠٧ - الدوران في المستوي هو تطبيق خطي لمجموعة نقاط المستوي على نفسه .

(باختيار o مبدأ الاحداثيات في المستوي يمكن تمثيل كل نقطة P من هـذا المستوي بشعاع طايق oP) .

الحل : ليكن ox , oy محورين متعامدين في المستوي π . وليكن (i , j) قاعـــدة طبيعية (قانونية) في π . لنعتبر التطبيق T هو الدوران بمقـدار زاوية ثابتة α حول النقطة o ولنـــبرهن أن T تطبيق خطي . يمكن أن يمثـــل الشعاع v = oP باحداثيي النقطـة . P = (x , y)

اذا كانت $o\,x_1\,y_1$ الجملة الجديدة الناتجة عن دوران الجملة o x y فان وضع P′ بالنسبة للجملة الجديدة مشابه لوضع P بالنسبة للجملة القديمة . فاذا رمزنا بـ (x_1', y_1') و (x', y') لاحـــداثيات P′ بالنسبة للجملتين الجديدة والقديمة على الترتيب فان :

$$x_1' = x \quad , \quad y_1' = y$$

ومنه :

$$o\,P' = x_1'\, i_1 + y_1'\, j_1$$

$$= x\, i + y\, j$$

ومنه :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

وحسب [١ - ٦] نجد أن T تطبيق خطي . وهو المطلوب .

٢٠٨ - التحاكي في المستوي هو تطبيق خطي لنقاط المستوي في المستوي نفسه .

الحل : نقول ان النقطة 'P تحاكي النقطـــة P بتحاك مركزه o ونسبته λ إذا تحقق الشرط :

$$\overrightarrow{oP'} = \lambda\, \overrightarrow{oP}$$

إذا كتبنا $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{oP} = (x , y)$, $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{oP'} = (x' , y')$ فان :

$$x' = \lambda x \quad , \quad y' = \lambda y$$

وبالتالي فان التطبيق $T : \overrightarrow{v} \longrightarrow \overrightarrow{v'}$ هو تطبيق خطي .

حالة خاصة : إذا كان $\lambda = -1$ فان $\overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{v}$ وبالتالي $T : \overrightarrow{v} \longrightarrow -\overrightarrow{v}$ يمثل تطبيق التناظر بالنسبة لـ o وهو تطبيق خطي .

٢٠٩ - إذا كان T و F مؤثرين خطيين على R^2 معرفين بالشكل :

$$T(x , y) = (y , x) \quad , \quad F(x , y) = (0 , x)$$

فأوجد : $T o F$, $F o T$, F^2 , T^2 , $T - F$

الحل : حسب التعريف لدينا :

$$(T o F)(x , y) = T(F(x , y))$$

$$= T(0 , x) = (x , 0)$$

$$(F o T)(x , y) = F(y , x) = (0 , y)$$

$$F^2(x , y) = F(F(x , y)) = F(0 , x) = (0 , 0)$$

إذن $F^2 = O$ (التطبيق المعدوم)

$$T^2(x , y) = T(T(x , y)) = T(y , x) = (x , y)$$

إذن $T^2 = I$ (التطبيق المطابق)

$$(T - F)(x , y) = T(x , y) - F(x , y)$$

$$= (y , x) - (o , x) = (y , o)$$

٢١٠ ـ ليكن $T : R^4 \longrightarrow R^3$ و $F : R^3 \longrightarrow R^3$ تطبيقين خطيين معرفين بالشكل :

$$T(x , y , z , w) = (x - y , z + w , x - y + z)$$

$$F(x , y , z) = (0 , x + y , x + y + z)$$

والمطلوب إيجاد : ١ ـ رتبة وصفرية كل من T و F .

٢ ـ $F o T$ و F^2 .

٣ ـ رتبة وصفرية F^2 .

الحل : ١ ـ إن نواة التطبيق الخطي T هي :

$$\text{Ker } T = \{ (x , y , z , w) \in R^4 : T(x , y , z , w) = 0 \}$$

$$= \{ (x , y , z , w) \in R^4 : x - y = 0 , z + w = 0 , x - y + z = 0 \}$$

إذن تتعين ker T بالمعادلات :

$$x - y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad w = 0$$

وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً ذا بعد واحـــد . إذن صفرية T تساوي الواحد ورتبته إذن ثلاثة . (مستندين في ذلك على النظرية ١٢ ـ ٦) .

أما بالنسبة لـ F فإن :

$$\text{Ker } F = \{ (x , y , z) \in R^3 : F(x , y , z) = 0 \}$$

$$= \{ (x , y , z) \in R^3 : x + y = 0 , x + y + z = 0 \}$$

إذن تتعين Ker T بالمعادلات :

$$x + y = 0 \quad , \quad z = 0$$

وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^3 ذا بعد واحد . اذن صفرية F تساوي الواحد ورتبته تساوي اثنين .

٢ - $F \circ T(x, y, z) = F(x - y \; , \; z + w \; , \; x - y + z)$

$$= (0 \; , \; x - y + z + w \; , \; 2x - 2y + 2z + w)$$

$$F^2(x, y, z) = F \circ F(x, y, z) = F(0, x + y \; , \; x + y + z)$$

$$= (0 \; , \; x + y \; , \; 2x + 2y + z)$$

٣ - $\operatorname{Ker} F^2 = \{ (x, y, z) \in R^2 \; : \; F^2(x, y, z) = 0 \}$

$$= \{ (x, y, z) \in R^3 \; : \; x + y = 0 \; , \; 2x + 2y + z = 0 \}$$

اذن تتعين $\ker F^2$ بالمعادلات $x + y = 0 \; , \; z = 0$ وهي تمثل فراغاً شعاعياً جزئياً ذا بعد واحد . اذن صفرية F^2 تساوي الواحد ورتبته تساوي اثنين .

٣١١ - ليكن V فراغ التطبيقات المستمرة من R الى R . إذا كان التطبيق $T : V \longrightarrow V$ معطى بالعلاقة :

$$\forall f \in V \; , \; \forall x, t \in R \; , \; (Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

فان T مؤثر خطي على V نسميه المؤثر التكاملي .

الحل : لاثبات أن T تطبيق خطي من V الى V وبالتالي مؤثر خطي على V ، نأخذ $f, g \in V$ فيكون استناداً لخواص التكامل :

$$(T(f+g))(x) = \int_0^x (f+g)(t)\,dt$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= (Tf)(x) + (Tg)(x)$$

$$= (Tf + Tg)(x)$$

ومنه :

$$T(f+g) = Tf + Tg$$

كذلك اذا كان $K \ni \lambda$ فإن .

$$(T(\lambda f))(x) = \int_0^x (\lambda f)(t)\,dt$$

$$= \lambda \int_0^x f(t)\,dt = \lambda (Tf)(x)$$

ومنه :

$$T(\lambda f) = \lambda (Tf)$$

وهذا مايثبت أن T مؤثر خطي على V .

٢١٢ - الفراغ الذاتي لمؤثر خطي : ليكن T مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V على الحقل التبديلي K . نقول عن الشعاع غير المعدوم $v \in V$ أنه شعاع ذاتي بالنسبة لـ T اذا وجد $\lambda \in K$ بحيث يكون :

$T(v) = \lambda v$ وتسمى λ القيمة الذاتية المرافقة ، برهن أن مجموعة الأشعة الذاتية ، V_λ ، بالنسبة لـ T والموافقة للقيمة الذاتية λ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V ، نسميه الفراغ (الجزئي) الذاتي لـ T الموافق للقيمة الذاتية λ .

الحل : للبرهان على أن V_λ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من V يكفي أن نتحقق من الشرطين التاليين :

$$\forall \quad v_1 , v_2 \in V_\lambda \Rightarrow v_1 + v_2 \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V_\lambda \quad , \quad k \in K \Rightarrow k v \in V_\lambda$$

إن v_1 و v_2 من V_λ يعني أن :

$$T(v_1) = \lambda v_1 \quad , \quad T(v_2) = \lambda v_2$$

ومنه :

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$ (T تطبيق خطي)

$$= \lambda v_1 + \lambda v_2$$

$$= \lambda (v_1 + v_2)$$

وهذا يعني أن $v_1 + v_2 \in V_\lambda$ كذلك .

$$T(k v) = k T(v)$$ (T تطبيق خطي)

$$= k \lambda v = \lambda (k v)$$ (عملية الجداء في K تبديلية)

ومنه $k v \in V_\lambda$ وبذلك يتم المطلوب .

٢١٣ - ليكن T مؤثراً خطياً على الفراغ الشعاعي V ولتكن

$v_1, \ldots, v_m$ أشعة ذاتية بالنسبة لـ T على الترتيب مع القيم الذاتية $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (انظر التمرين ٣١٢) .

إذا كان :

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \quad , \quad i , j = 1 , \ldots , m$$

فإن : $v_1, \ldots, v_m$ مجموعة أشعة مستقلة خطياً .

الحل : نتبع هنا طريقة البرهان بالتراجع . إذا كان $m = 1$ فإن $v_1 \in V$ وبما أن $v_1 \neq 0$ بالتعريف فإن v_1 مستقل خطياً . أما إذا كان $m = 2$ فإننا نفرض العلاقة :

$$(I) \qquad a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \quad , \quad a_1 , a_2 \in K$$

ولنثبت أن $a_1 = a_2 = 0$. إذا ضربنا طرفي العلاقة (I) بـ λ_1 فنحصل على :

$$(II) \qquad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0$$

وإذا أخذنا التطبيق T على طرفي العلاقة (I) فنحصل على :

$$T (a_1 v_1 + a_2 v_2) = T (0) = 0$$

وبما أن T خطي فنجد :

$$a_1 T (v_1) + a_2 T (v_2) = 0$$

وبالتالي :

$$(III) \qquad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

ومن العلاقتين (II) و (III) نجد :

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$$

بما أن $v_2 \neq 0$ بالتعريف و $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ فان $a_2 = 0$ وبالرجوع لـ (I) نجد $a_1 = 0$.

(بصورة مشابهة نقيم البرهان من أجل $m > 2$) .

٢١٤ - ليكن $T : R^2 \longrightarrow R^2$ تطبيقاً خطياً معرفاً بالعلاقة :

$$T(v) = T(x , y) = (x - 2y , -x + y)$$

حيث $v = (x ; y)$ شعاع ما من R^2 . أوجد الأشعة الذاتية والقيم الذاتية الموافقة بالنسبة لـ T .

الحل : اذا وجد شعاع ذاتي $v = (x , y)$ بالنسبة لـ T ورافق القيمة الذاتية λ فيجب أن يكون $T(v) = \lambda v$ أي :

$$\lambda x = x - 2y \quad , \quad \lambda y = -x + y$$

ومنه نحصل على المعادلتين :

$$(*) \quad \begin{cases} (\lambda - 1) x + 2y = 0 \\ x + (\lambda - 1) y = 0 \end{cases}$$

وبما أن $v = (x , y) \neq 0$ فإنه يجب أن يكون معين الأمثال في مجموعة المعادلتين السابقتين صفراً أي :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 2 = 0$$

ومنه :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$$

إذا عوضنا $\lambda = \lambda_1$ في المعادلتين (*) فنجد الفراغ الذاتي :

$$V_1 = \{ (x, y) \in R^2 \ : \ x + \sqrt{2}\, y = 0 \}$$

الموافق للقيمة الذاتية λ_1 .

وإذا عوضنا $\lambda = \lambda_2$ في المعادلتين (*) نجد الفراغ الذاتي :

$$V_2 = \{ (x, y) \in R^2 \ : \ x - \sqrt{2}\, y = 0 \}$$

الموافق للقيمة الذاتية λ_2 .

٢١٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K عدد أبعاده محدود وليكن T و F تطبيقين خطيين من V الى V نفسه بحيث يكون $F \circ T = T \circ F$. اذا كان v شعاعاً ذاتياً لـ T مرافقاً للقيمة الذاتية λ فبرهن أن $F(v)$ شعاع ذاتي لـ T مرافق للقيمة الذاتية λ بشرط $F(v) \neq 0$.

الحل : ان فرض v شعاعاً ذاتياً لـ T مرافقاً للقيمة الذاتية λ يعني أن :

$$T(v) = \lambda v$$

وبأخذ التطبيق F على الطرفين نجد أن :

$$F(T(v)) = F(\lambda v)$$

$$F \circ T(v) = \lambda F(v) \qquad (\text{F خطي})$$

ومن العلاقة $F \circ T = T \circ F$ نجد أن :

$$T \circ F(v) = T(F(v)) = \lambda F(v)$$

وهذا يعني أن $F(v)$ شعاع ذاتي لـ T مرافق للقيمة الذاتية λ وهو المطلوب .

٢١٦ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . وليكن $T : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً . اذا كان n , q , p عدد أبعاد $V , \mathrm{Ker}T$ و $T(V)$ على الترتيب فبرهن أن : $n = p + q$.

الحل : ليكن $w_1 , \ldots , w_p$ قاعدة في $T(V)$. وليكن $v_1 , \ldots , v_p$ أشعة من V بحيث يكون : $T(v_i) = w_i$ و $i = 1 , \ldots , p$ وليكن $u_1 , \ldots , u_q$ قاعدة في $\mathrm{Ker}\, T$. اذا برهنا أن مجموعة الأشعة $(v_1 \ldots , v_p$ و $u_1 , \ldots , u_q)$ تصلح قاعدة في V فإننا نكون قد برهنا أن $n = p + q$.

في الحقيقة اذا كان v شعاعاً من V فانه يوجد $a_1 , \ldots , a_p \in K$ بحيث يكون :

$$\begin{aligned} T(v) &= a_1 w_1 + \ldots + a_p w_p \\ &= a_1 T(v_1) + \ldots + a_p T(v_p) \\ &= T(a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p) \end{aligned}$$ (T تطبيق خطي)

ومنه :

$$T(v) - T(a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p) = 0$$

$$T(v - a_1 v_1 - \ldots - a_p v_p) = 0$$ (T تطبيق خطي)

وبالتالي فإن $v - (a_1 v_1 + \ldots + a_p v_p)$ ينتمي إلى $\mathrm{Ker}\, T$. إذن يوجد $b_1 , \ldots , b_q \in K$ بحيث يكون :

$$v - (a_1 v_1 + \dots + a_p v_p) = b_1 u_1 + \dots + b_q u_q$$

ومنه :

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_q u_q$$

وهـذا يعني أن كل شعاع v من V يمكن كتابته بعبارة خطية بالأشعة $v_1, \dots, v_p\, u_1 \dots, u_q$ ولكي نبرهن أنها قاعدة في V بقي أن نتحقق من كونها مستقلة خطياً . من أجل ذلك لنفرض أن :

$$(*) \qquad a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 u_1 + \dots + b_q u_q = 0$$

فاذا طبقنا T على طرفي هذه العلاقة مع ملاحظة أن : $T(u_i) = 0\,, i = 1, \dots, q$ نجد :

$$(**) \qquad a_1 T(v_1) + \dots + a_p T(v_p) = 0$$

ولدينا بالفرض $T(v_1), \dots, T(v_p)$ مستقلة خطيـاً لذلك فالعلاقة (**) تفيد بأن $a_1 = \dots = a_p = 0$ وبالتالي تصبح العلاقة (*) بالشكل :

$$(***) \qquad b_1 u_1 + \dots + b_q u_q = 0$$

وبما أن $u_1, \dots, u_q$ مستقلة خطياً لكونها تشكل قاعدة في $\operatorname{Ker} T$ فالعلاقة (***) تفيـد بأن $b_1 = \dots b_q = 0$. إذن العلاقـة (*) تؤدي الى كون $a_1 = \dots = a_p = b_1 = \dots = b_q = 0$ وبالتـالي فان الأشعة $v_1, \dots, v_p\,, u_1, \dots, u_q$ مستقلة خطياً وهو المطلوب .

ملاحظة : يفيد الحل السابق بأن الفراغ الشعاعي V قد جزىء الى فراغين جزئيين . الأول U يتولد بالأشعة $v_1, \dots, v_p$ والثاني $\operatorname{Ker} T$

يتولد بالأشعة $u_q , \dots , u_1$. وأن كل شعاع من V يمكن كتابته كمجموع شعاعين الأول من U والثاني من Ker T . نقول في هذه الحالة أن V هو المجموع المباشر لـ Ker T , U ونكتب ذلك بالشكل $V = U \dotplus Ker\,T$ لاحظ أن $U \cap Ker\,T = \{0\}$ دوماً .

٢١٧ - ليكن $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً نواته $Ker\,T = \{0\}$. إذا كان عدد أبعاد V يساوي عدد أبعاد W فبرهن أن $T(V) = W$.

الحل : إن T(V) هو فراغ جزئي من W . وبما $Ker\,T = \{0\}$ فان عدد أبعاد T(V) يساوي حسب التمرين ٢١٦ ، عدد أبعاد V وبالتالي يساوي عدد أبعاد W وهذا يعني أن T(V) هو الفراغ W نفسه .

٢١٨ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K وليكن $T : V \to V$ تطبيقاً خطياً محققاً للعلاقة $T^2 = T \circ T = T$. إذا كان $T(V) = U$ و $Ker\,T = W$ فبرهن أن $V = U \dotplus W$.

الحل : يمكن برهان المطلوب باتباع الطريقة التي برهن فيها التمرين ٢١٦ ونترك ذلك للقارىء . وسنتبع الطريقة التالية : يمكن أن نكتب أي شعاع $a \neq 0$ من V بالشكل : $a = a - T(a) + T(a)$. إن القسم $a - T(a)$ ينتمي الى W وذاك لأن :

$$T(a - T(a)) = T(a) - T \circ T(a) = T(a) - T(a) = 0$$

وذلك لأن $T(a) \in V$.

أما القسم $T(a)$ فهو ينتمي الى U . وليتم المطلوب يجب أن نثبت أن الصفر هو الشعاع الوحيد المشترك بين U و W . من أجل هذا

نفرض أن $u \neq 0$ ينتمي الى $W \cap U$. إذا كان $u \in U$ فانه يوجد عنصر a من V من الشكل $T(a) = u$ وإذا كان $u \in W$ فإن $T(u) = 0$ ومنه :

$$T \circ T(a) = T(u) = 0$$

وحسب الفرض :

$$T \circ T(a) = T(a) = u = 0$$

وهذا مخالف للفرض أي $W \cap U = \{0\}$ وبالتالي فان $V = U \dotplus W$.

٢١٩ - ليكن $F, T : V \to V$ تطبيقين خطيين محققين العلاقات التاليـــة :

آ - $F + T = I$ (التطبيق الطابق) .

ب - $F \circ T = T \circ F = 0$ (التطبيق المعدوم)

برهن أن : $\operatorname{Ker} T = F(V)$ و $\operatorname{Ker} F = T(V)$

الحل : للبرهـان على أن $\operatorname{Ker} T = F(V)$ يجب أن نـــبرهن أن $F(V) \subseteq \operatorname{Ker} T$ و $\operatorname{Ker} T \subseteq F(V)$. إذا كان $u \in F(V)$ فإنه يوجد a من V يحقق العلاقة $F(a) = u$. باستخدام العلاقة ب نجد :

$$T \circ F(a) = T(u) = 0$$

أي أن $u \in \operatorname{Ker} T$ وبالتالي فإن : $F(V) \subseteq \operatorname{Ker} T$

لنفرض الان أن $u \in \operatorname{Ker} T$ ينتج عن ذلك أن : $T(u) = 0$ وباستخدام العلاقة (آ) نجد أن :

$$I(u) = u = F(u) + T(u) = F(u)$$

أي أن $u \in F(V)$ وبالتالي فان $\mathrm{Ker}\, T \subseteq F(V)$ وبذلك نكون قد برهنا أن $\mathrm{Ker}\, T = F(V)$. وبصورة مشابهة تبرهن العلاقة $\mathrm{Ker}\, F = T(V)$.

٢٢٠ - إذا كان التطبيق الخطي $P : V \to V$ محققاً للعلاقة :

$$(P^2 = P \circ P) \quad , \quad P^2 - P + I = 0$$

فبرهن أن التطبيق المعاكس P^{-1} موجود ويساوي $I - P$.

الحل : لاثبات أن P^{-1} موجود علينا أن نثبت أن P متباين وغامر أي منتظم . في الحقيقة :

$$a_1 , a_2 \in V \; : \; a_1 \neq a_2 \Rightarrow P(a_1) \neq P(a_2)$$

لأن :

$$P(a_1) = P(a_2) \Rightarrow P^2(a_1) = P^2(a_2)$$

ومنه :

$$(P^2 - P)(a_1) = (P^2 - P)(a_2)$$

أو :

$$(P^2 - P)(a_1 - a_2) = 0$$

وبما أن $a_1 - a_2 \neq 0$ لأنه شعاع ما من V فان العلاقة الأخيرة تؤدي الى أن $P^2 - P = 0$ التطبيق المعـــدوم وهـــذا يخالف الفرض حيث : $P^2 - P = -I$. ولكي نبرهن على أنه غامر يجب أن نبرهن :

$$\forall a \in V \; , \; \exists u \in V \; : \; P(u) = a$$

مهما كان a من V فان : $a = I(a)$

(حسب الفرض) $= (P - P^2)(a)$

$$= P \circ (I - P)(a)$$

$$= P(u)$$

حيث رمزنا بـ $u = (I - P)(a)$.

ونكون بذلك قد برهنا أن كل شعاع a من V خيال لشعاع u من V أي أن التطبيق المفروض غامر وقد برهنا سابقاً أنه متباين فهو قابل للعكس أي P^{-1} موجود .

ينتج من الفرض :

$$I = P - P^2 = P \circ (I - P)$$

وكذلك :

$$(I - P) \circ P = P - P^2 = I$$

وتفيد هــذه العلاقات بأن التطبيق $I - P$ هو التطبيق P^{-1} ، المعاكس للتطبيق P .

٣٢١ - ليكن التطبيقان الخطيان $A, B : V \rightarrow V$. برهن أن $\text{Ker } A = \text{Ker } B = 0$ تردي إلى : $\text{Ker } (B \circ A) = 0$

الحل : لنفرض b شعاعاً منتمياً الى $\text{Ker } (B \circ A)$ فنجد $(B \circ A)(b) = 0$ ولكن $(B \circ A)(b) = B(A(b)) = 0$ وهذا يعني أن $A(b)$ ينتمي الى $\text{Ker } B$ ويكون بحسب الفرض $A(b) = 0$. وتفيد هذه العلاقة بدورها أن b ينتمي الى $\text{Ker } A$ ويكون بحسب الفرض $b = 0$ إذن $\text{Ker}(B \circ A) = 0$ وهو المطلوب .

٣٢٢ - ليكن V فراغاً شعاعياً معرفاً على الحقل K عدد أبعاده يساوي n . ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي أي $V^* = \text{Hom}(V, K)$

برهن أن عدد أبعاد V^* هو أيضاً n .

الحل : ليكن $(e_1, \ldots, e_n)$ قاعدة في V . إن النظرية [٦ - ١٠] تفيد بأن أي تطبيق خطي من V الى K يتعين بمعرفة خيال أشعة قاعدة في V وفق هذا التطبيق . لنعرف التطبيقات الخطية $f_1, \ldots, f_n$ من V الى K بالعلاقات :

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} = 1 \quad , i = j$$
$$= 0 \quad , i \neq j$$

إذا برهنا أن $f_1, \ldots, f_n$ تشكل قاعدة في V^* فنكون بذلك قد برهنا أن عدد أبعاد V^* هو n ، عدد أشعة القاعدة ، من أجل ذلك يجب أن نبرهن أولاً أن $f_1, \ldots, f_n$ مستقلة خطياً أي أن :

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$$

وهذا ينتج بأخذ قيمة التطبيق $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$ من أجل e_j مع تغيير j من 1 الى n .

$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n)(e_j) = 0(e_j) = 0$$

ولكن استناداً الى تعريف f_i

$$(a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n) e_j = a_j f_j(e_j)$$

ويكون :

$$a_j f_j(e_j) = a_j = 0$$

وذلك من أجل $j = 1, 2, \ldots, n$ وهـــذا ما يبرهن على أن f_i مستقلة خطياً .

بقي علينا أن نبرهن أن $f_1, \dots, f_n$ تولد الفراغ الشعاعي V^* أي أن كل عنصر F من V^* يمكن كتابته بعبارة خطية في $f_1, \dots, f_n$.

أقول أنه إذا كان $F(e_i) = b_i$ فان $F = b_1 f_1 + \dots + b_n f_n$

وذلك لأن قيمة التطبيق في الطرف الأيسر من أجل e_i هي $(b_1 f_1 + \dots + b_n f_n)(e_i) = b_i$ وهي نفسها قيمة F من أجل e_i و i تتغير من 1 الى n . أي أن قيمة التطبيقين متساوية من أجل جميع أشعة القاعدة $e_1, \dots, e_n$ وبالتالي من أجل جميع عناصر الفراغ الشعاعي V (لماذا ؟) . وبالتالي فهما متساويان . بهذا نكون قد برهنا أن $f_1, \dots, f_n$ تشكل قاعدة في V^* وبالتالي فعدد أبعاد V^* يساوي n .

ملاحظة : يطلق عادة على القاعدة $f_1, \dots, f_n$ في V^* والمعرفة في التمرين السابق إسم القاعدة الثنوية للقاعدة $e_1, \dots, e_n$ في V . وكثيراً من الأحيان يرمز لهذه القاعدة الثنوية برمز قاعدة V نفسها ويوضع فوقها نجمة « $e_1^*, \dots, e_n^*$ » .

٢٢٣ - ليكن V فراغاً شعاعياً عدد أبعاده n محدود معرفاً على الحقل K . وليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي لـ V . برهن أنه يوجد تطبيق خطي منتظم من V الى V^* .

الحل : لنأخذ $e_1, \dots, e_n$ قاعدة في الفراغ الشعاعي V . ليكن $f_1, \dots, f_n$ القاعدة الثنوية للقاعدة المفروضة أي أن :

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, \dots, n$$

إن التطبيق $T : V \to V^*$ المعطى بالعلاقة :

$$T(e_i) = f_i$$

هو : ١ - تطبيق خطي (نظرية [١٠ - ٦]) .

٢ - تطبيق متباين (لماذا ؟) .

٣ - تطبيق غامر (ينتج من أن لـ V , *V نفس العدد من الأبعاد) .

وبالتالي فان T تطبيق خطي منتظم .

٢٢٤ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً فبرهن ان التطبيق $T^* : W^* \to V^*$ المعطى بالعلاقة :

$$(I) \qquad \forall g \in W^* \quad , \quad T^*(g) = g \circ T$$

خطي (نسمي *T منقول « مرافق » التطبيق الخطي T) .

الحل : ان الشعاع g من *W ليس إلا تطبيقاً خطياً من W الى K . وبما أن مركب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي فان $g \circ T$ هو تطبيق خطي من V إلى K فهو عنصر من *V . اذن العلاقة (I) تعرف تطبيقاً *T من *W إلى *V . نجد أن :

$$\forall f , g \in W^* \quad , \quad T^*(g+f) = (g+f) \circ T$$

$$= g \circ T + f \circ T$$

(عملية تركيب التطبيقات توزيعية بالنسبة الجمع)

$$= T^*(g) + T^*(f)$$

ونجد أيضاً :

$$\forall \lambda \in K \quad , \quad T^*(\lambda g) = (\lambda g) \circ T$$
$$= \lambda (g \circ T) = \lambda T^*(g)$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن T^* تطبيق خطي .

تمارين غير محلولة

٢٢٥ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K . برهن أن التطبيق $T : V \to V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad , \quad T(v) = -v$$

هو تطبيق خطي .

٢٢٦ - ليكن A شعاعاً مفروضاً من الفراغ الشعاعي V على الحقل K . ليكن التطبيق $F : V \to V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad , \quad F(v) = v + A$$

بين فيما إذا كان F خطياً أم لا ؟

٢٢٧ - إذا كان A شعاعاً مفروضاً من الفراغ الشعاعي R^3 .
برهن أن التطبيق $T : R^3 \to R^3$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad , \quad T(v) = v \wedge A$$

حيث $\wedge$ تشير إلى الجداء الخارجي للشعاعين ، هو تطبيق خطي .

٢٢٨ - ليكن V الفراغ الشعاعي المتشكل من مجموعة التوابع الحقيقية القابلة للاشتقاق من أية رتبة . ليكن التطبيق $D : V \to V$ المعرف بعملية الاشتقاق . برهن ان التطبيق $D \circ D = D^2$ خطي .
أوجد نواة التطبيق D^2 ورتبته .

٢٢٩ - ليكن V و D كما في [التمرين ٢٢٨] . إذا كان I

التطبيق المطابق على V فبرهن أنه إذا كان $a \in R$ ، فإن $T = D - a\,I$ مؤثر خطي على V . أوجد نواة T .

٢٣٠ - برهن أن التناظر بالنسبة لمحور مار من مبدأ الاحداثيات في مستو هو تطبيق خطي لنقاط المستوي في المستوي نفسه .

٢٣١ - ليكن T تطبيقاً خطياً من R^2 الى R^2 معطى بالعلاقتين :

$$x' = a\,x + b\,y \quad , \quad y' = c\,x + d\,y$$

حيث $v' = (x', y')$ خيال $v = (x, y)$ وفق T و a, b, c, d ثوابت من R . ناقش وجود أشعة ذاتية للتطبيق T .

٢٣٢ ليكن $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً وليكن عدد أبعاد V يساوي عدد أبعاد W . إذا كان $Ker\,T = \{0\}$ فبرهن أن T تطبيق منتظم .

٢٣٣ - ليكن V , W فراغين شعاعيين على الحقل K . وليكن عدد أبعاد V أصغر من عدد أبعاد W . برهن أن أي تطبيق خطي $T : V \to W$ لا يمكن أن يكون غامراً .

٢٣٤ - ليكن $T : V \to V \times V$ تطبيقاً معرفاً بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad : \quad T(v) = (v , v)$$

برهن أن T تطبيق خطي .

٢٣٥ - ليكن H , W فراغين شعاعين جزئيين من الفراغ الشعاعي V . ليكن $T : H \times W \to V$ التطبيق المعرف بالعلاقة :

$$\forall u \in H , \forall w \in W \quad : \quad T(u , w) = u - w$$

برهن أن T تطبيق خطي . وبرهن أن صورة T هو $H \cup W$ ونواته هي $H \cap W$.

٢٣٦ - ليكن $F , T : V \rightarrow V$ تطبيقين خطيين يحققين العلاقات التاليـــة :

١ - (I التطبيق المطابق) $F + T = I$

٢ - (O التطبيق المعدوم) $F o T = F o T = O$

٣ - $F o F = F \ , \ T o T = T$

برهن أن $V = F(V) \dotplus T(V)$ (جمع مباشر) .

٢٣٧ - ليكن T تطبيقاً خطياً منتظماً من V الى U و F تطبيقاً خطياً منتظماً من U الى W . برهن أن $F o T$ تطبيق خطي منتظم من U الى W وأن $(F o T)^{-1} = T^{-1} o F^{-1}$.

٢٣٨ - ليكن التطبيقان الخطيان $A : V \rightarrow U \ , \ B : U \rightarrow W$.
إذا كان $Ker A = Ker B = 0$ فبرهن أن $Ker (B o A) = 0$ (تعميم للتمرين المحلول [٢٢١]) .

٢٣٩ - ليكن V فراغ كثيرات الحدود من الدرجـة n (أي $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$) برهن أن التطبيـــق $T : V \rightarrow V$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall f(t) \in V \ : \ T(f(t)) = \frac{1}{t} \int_0^t f(x) \, dx$$

هو تطبق خطي (مؤثر خطي) . وإذا كان **D** المؤثر التفاضلي على V فبرهن أن $D \circ T = T \circ D$.

٢٤٠ - إذا كان $n \neq m$ فبرهن أنه لا يمكن إيجاد تطبيق خطي منتظم من R^n على R^m .

٢٤١ - ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ الشعاعي V . لتكن S مجموعة جزئية من V . ولتكن U المجموعة الجزئية من V^* المعرفة بالعلاقة :

$$U = \{ f \in V^* \;:\; f(v) = 0 \;,\; \forall v \in S \}$$

برهن : ١ - أن U فراغ شعاعي جزئي من V^* (يطلق عليه الفراغ الجزئي المتعامد مع S) .

٢ - عدد أبعاد V = عدد أبعاد S + عدد أبعاد U .

٢٤٢ - ليكن V^* الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V وليكن $(V^*)^*$ الفراغ الشعاعي الثنوي للفراغ V^* . برهن أن التطبيق $T : V \to (V^*)^*$ المعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \;,\; f \in V^* \;,\; (T(v))(f) = f(v)$$

هو تطبيق خطي منتظم .

[لاحظ أن $T(v)$ هو عنصر من $(V^*)^*$ وبالتالي فهو تطبيق خطي من V^* إلى الحقل K ، فالعبارة $(T(v))(f)$ إذن ذات معنى وتمثل عنصراً من K يساوي بالتعريف $f(v)$] .

٢٤٣ - ليكن T تطبيقاً خطياً من V الى W وليكن F تطبيقاً

خطياً من W الى V . بفرض أن عدد أبعاد V أكبر من عدد أبعاد W برهن أن مرتبة التطبيق $F \circ T$ أصغر من عدد أبعاد V .

٢٤٤ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 بحيث $T \neq O$ (لايساوي التطبيق المعدوم) و $T^2 = O$ (O التطبيق المعدوم) . برهن أنه يوجـــد قاعدة (v_1 , v_2) في R^2 من الشكل :

$$T(v_1) = v_2 \quad , \quad T(v_2) = 0$$

٢٤٥ - ليكن T و F مؤثرين خطيين على R^3 ومعرفين بالعلاقتين :

$$F(x, y, z) = (x - y , z + y , x)$$

$$T(x, y, z) = (y , -x , -z)$$

حيث (x , y , z) تمثل عناصر شعاع ما من R^3 . والمطلوب إيجاد :

١ - العناصر $F(1, 0, 2)$ و $T(-1, 1, 0)$.

٢ - التطبيقات $F \circ T , T^2$ و $T \circ F , F^2$ و $2T - 3F$ ومن ثم تعين رتبة وعدد أبعاد ونواة كل من هذه التطبيقات الخطية .

٢٤٦ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^2 ومحققاً للعلاقات :

$T^2 = T$ ، $T \neq I$ (I التطبيق المطابق) ، $T \neq O$ (O التطبيق المعدوم)

برهن أنه يوجد قاعدة (v_1 , v_2) في R^2 من الشكل :

$$T(v_1) = v_1 \quad , \quad T(v_2) = 0$$

٢٤٧ - ليكن $T : V \to U$ و $F : U \to W$ تطبيقين خطيين .

اذا كان T^* , F^* منقولي T , F على الترتيب فبرهن أن $(F \circ T)^* = T^* \circ F^*$.

٢٤٨ - ليكن V^* , W^* الفراغين الشعاعيين الثنويين لـ V , W على الترتيب . ليكن التطبيق :

$$P : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V^*, W^*)$$

المعطى بالعلاقة :

$$P(T) = T^*$$

حيث T عنصر ما من $\text{Hom}(V, W)$ و T^* منقول هذا التطبيق .
برهن أن P تطبيق خطي .

الفصل السابع

المصفوفات والمعينات

سندرس في هذا الفصل كائناً رياضياً جديداً ندعوه مصفوفة ، ذا صلة وثيقة بالتطبيقات الخطية على الفراغات الشعاعية والتي درسناها في الفصل السابق .

نبدأ أولاً باعطاء تعريف مباشر للمصفوفة . ليكن F حقلاً تبديلياً وليكن m و n عددين طبيعيين . نقول عن جدول مكون من عناصر من F مرتبة بالشكل (*) :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \dots & \alpha_n^m \end{bmatrix} \qquad (1)$$

إنــه مصفوفة على الحقل F . نسمي العناصر الموجودة في خط أفقي واحد سطراً ونرقم هذه الأسطر من أعلى الى أسفل ، ونسمي العناصر

(*) يستخدم الرمزان ‖ : : : ‖ و (: : :) للدلالة على المصفوفة أيضاً .

الموجودة في خط شاقولي واحد عموداً ونرقم هذه الأعمدة من اليسار الى اليمين . كما نسمي عناصر F المشكلة للمصفوفة (1) عناصر أو مركبات المصفوفة . وبصورة خاصة نقول عن المركبة α_j^i المركبة ال i j للمصفوفة ونختزل كتابة المصفوفة (1) بالشكل :

$$[\alpha_j^i] \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

حيث وضعنا الدليل في الأعلى للدلالة على رقم السطر والدليل في الأسفل للدلالة على رقم العمود . ففي المصفوفة (1) لدينا m سطراً و n عموداً ولذلك نقول أن لدينا مصفوفة من الشكل $m \times n$ أو مصفوفة من السعة $m \times n$.

(نصطلح على أن العدد الأيسر يدل على عدد الأسطر والعدد الأيمن يدل على عدد الأعمدة) . ونرمز للمصفوفة (1) بحرف واحد ، A مثلاً ، أو $A(m, n)$ لاظهار عدد الأسطر والأعمدة في المصفوفة المعينة .

ونرمز عادة بـ A^i للسطر ذي الرقم i من المصفوفة A أي :

$$A^i = [\alpha_1^i \ \ \alpha_2^i \ \ldots \ \alpha_n^i]$$

كما نرمز بـ Aj للعمود ذي الرقم j من هذه المصفوفة أي :

$$A_j = \begin{bmatrix} \alpha_j^1 \\ \alpha_j^2 \\ \vdots \\ \alpha_j^m \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أنه يمكن اعتبار A^i مصفوفة من السعة $1 \times n$ واعتبار A_j مصفوفة من السعة $m \times 1$. كما ويمكن اعتبار كل عنصر من A مصفوفة من السعة 1×1 .

مثال : إن المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة من السعة 3×2 على الحقل R . سطرها الأول $(3 \ 1- \ 2)$ وسطرها الثاني $(4 \ 0 \ 5)$. وعمودها الأول $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ وعمودها الثاني $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ وعمودهـا الثالث $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

١ - ٧ تعاريف :

(١) نقول عن مصفوفة $A = [\alpha_j^i]$ أنها مصفوفة صفرية إذا كان كل عنصر من عناصرها يساوي الصفر . أي $\alpha_j^i = 0$ من أجل جميع القيم الممكنة لـ i و j .

(٢) نسمي كل مصفوفة ناتجة عن مصفوفة مفروضة A بحذف عدد من أسطرها وعدد من أعمدتها مصفوفة جزئية من A .

(٣) لتكن المصفوفة $A = [\alpha_j^i]$ من السعة $m \times n$. نسمي منقول المصفوفة A ، ونرمز لذلك بـ A_t ، [أو A^t] المصفوفة ذات السعة $n \times m$ التي تحقق :

$$A_t = [\beta_i^j] \ : \ \beta_i^j = \alpha_j^i \quad , \quad \begin{matrix} i = 1 , \ldots , m \\ j = 1 , \ldots , n \end{matrix}$$

ونلاحظ أن A_t تنتج عن A بجعل أسطرها أعمدة وأعمدتها أسطراً مع المحافظة على الترتيب .

مثال : إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$ فإن :

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(٤) نقول عن مصفوفة أنها مربعة إذا كان عدد أسطرها مساوياً عدد أعمدتها . فإذا كانت المصفوفة المربعة A من السعة $[n \times n]$:

$$A = [\alpha_j^i] = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

فإننا نسمي العناصر $\alpha_1^1, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_n^n$ العناصر القطرية للمصفوفة A . يسمى مجموع العناصر القطرية لمصفوفة مربعة A أثر المصفوفة ويرمز له بـ tr(A) . هكذا لدينا في المصفوفة الأخيرة :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i$$

إذا كانت جميع عناصر المصفوفة المربعة A تساوي الصفر عدا العناصر القطرية فنسمي A مصفوفة قطرية. بالاضافة الى ذلك إذا كانت جميع العناصر القطرية مساوية الواحد ، فإننا نسمي عندئذ المصفوفة A المصفوفة الواحدية ونرمز لها بـ I أو I_n للدلالة على عدد الاسطر والاعمدة :

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أما إذا كانت جميع عناصر المصفوفة المربعة A والواقعة تحت (فوق) العناصر القطرية مساوية الصفر فعندئذ نسمي المصفوفة مصفوفة مثلثية الشكل من الاعلى (الاسفل) .

مثال :

المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية من الاعلى

والمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية (مثلثية من الاعلى ومن الاسفل)

والمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة واحدية من السعة 2×2

العمليات على المصفوفات :

سنبرهن فيما يلي وجود تقابل بين مجموعة مصفوفات على حقل تبديلي F وبين مجموعة تطبيقات خطية بين فراغات شعاعية على الحقل F . ومن

هذا التقابل نستنتج العمليات المختلفة على مجموعة المصفوفات .

لتكن المصفوفة A من السعة $n \times m$ على الحقل F .

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \\ \alpha_1^m & \cdots & \alpha_n^m \end{bmatrix} = [\alpha_j^i] \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix} \quad .$$

ليكن V , W فراغين شعاعين على الحقل F ، عدد ابعادهما n , m على الترتيب . لنفرض أن جملة الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ تشكل قاعدة في V وأن جملة الاشعة $w_1, \ldots, w_m$ تشكل قاعدة في W . ولنبرهن أن المصفوفة A تعرف تطبيقاً خطياً من V الى W .

إن كل سطر A^i من أسطر A مؤلف من n عنصراً مرتباً من F وبالتالي يمكن اعتبارها مركبات شعاع من V نرمز له أيضاً بـ A^i أي :

$$A^i = [\alpha_1^i \ , \ \alpha_2^i \ , \ \ldots \ , \ \alpha_n^i] \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

نعرف التطبيق $T : V \to W$ بالشكل التالي :

$$\forall\, v = \lambda^1 v_1 + \ldots + \lambda^n v_n \in V \quad :$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{m} (A^i \,.\, v) w_i$$

حيث: $A^i \,.\, v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \lambda^j$ (الجداء الداخلي للشعاعين)

ولنبرهن أن التطبيق T (تطبيق خطي) .

$$\forall v = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)^{(*)},\ u = (\beta^1, \ldots, \beta^n) \in V$$

$$T(v+u) = \sum_{i=1}^{n} (A^i . (v+u))\, w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (A^i . v + A^i u)\, w_i$$

(الجداء الداخلي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الاشعة)

$$= \sum_{i=1}^{m} (A^i . v) . w_i + \sum_{i=1}^{m} (A^i . u)\, w_i$$

$$= T(v) + T(u)$$

$$\forall \mu \in F \ :$$

$$T(\mu x) = \sum_{i=1}^{m} (A^i . (\mu v))\, w_i$$

(حسب خواص الجداء الداخلي)

$$= \mu \sum_{i} (A^i . v)\, w_i$$

$$= \mu\, T(v)$$

وبذلك نكون قد برهنا أن T تطبيق خطي نسميه التطبيق الخطي الموافق للمصفوفة A ونرمز له بـ T_A . لنبرهن الان العكس . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطياً وكان n عدد أبعاد V و m عدد أبعاد W فانه يرافق هذا التطبيق الخطي مصفوفة من السعة $m \times n$ ، وذلك لان

(*) سنصطلح دوماً على وضع الدليل من الأعلى لمركبات شعاع بالنسبة لقاعدة مفروضة .

خيال أشعة القاعدة $\{ v_i \}$ من V وفق التطبيق الخطي T ، تراكيب خطية بأشعة القاعدة $\{ w_i \}$ من W وبعناصر من الحقل F . فاذا كتبنا :

$$T(v_1) = \alpha_1^1 w_1 + \dots + \alpha_1^m w_m$$

$$T(v_2) = \alpha_2^1 w_1 + \dots + \alpha_2^m w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = \alpha_n^1 w_1 + \dots + \alpha_n^m w_m$$

فان عوامل هذه العلاقات تشكل مصفوفة من الشكل :

$$A = [\alpha_j^i] \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

وهي مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل F . نسمي هذه المصفوفة المصفوفة الموافقـــة للتطبيق الخطي T أو مصفوفة التطبيق الخطي T . والتطبيق الخطي T هو التطبيق الموافق T_A لهذه المصفوفة لانه :

$$\forall v = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in V \quad :$$

$$T(v) = T(\lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n)$$

$$= \lambda^1 T(v_1) + \dots + \lambda^n T(v_n) \qquad (\text{تطبيق خطي } T)$$

$$= \lambda^1 (\alpha_1^1 w_1 + \dots + \alpha_1^m w_m) + \dots$$

$$+ \lambda^n (\alpha_n^1 w_1 + \dots + \alpha_n^m w_m)$$

$$= (\lambda^1 \alpha_1^1 + \lambda^2 \alpha_2^1 + \dots + \lambda^n \alpha_n^1) w_1 + \dots$$

$$+ (\lambda^1 \alpha_1^m + \dots + \lambda^n \alpha_n^m) w_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (A^i \cdot v) w_i = T_A(v)$$

٢ - ٧ نظرية : ليكن W , V فراغين شعاعيين على الحقل التبديلي K ، عـدد أبعادهما m , n على الترتيب . ولتكن $\{ v_j \}$ قاعـدة في V و $\{ w_i \}$ قاعدة في W . يرافق كل مصفوفة A من السعة $m \times n$ على الحقل K تطبيق خطي $T_A : V \to W$ بالنسبة للقاعـدتين المفروضتين في W , V . وبالعكس يرافق كل تطبيق خطي $T : V \to W$ مصفوفة A من السعة $m \times n$ على الحقل K وبحيث يكون $T = T_A$.

٣ - ٧ **مثال** : لتكن (v_1 , v_2) قاعدة في $V_2(R)$ و (w_1 , w_2 , w_3) قاعـدة في $W_3(R)$. يرافق المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ التطبيق الخطي $T : V_2(R) \to W_3(R)$ المعرف بالشكل :

$$T (v_1) = 3\, w_1 - w_2 + 5\, w_3$$

$$T (v_2) = w_1 + w_2 + 2\, w_3$$

نستنتج من النظرية [٢ - ٧] أن التطبيق $A \to T_A$ تقابل بـين مجموعة المصفوفات من السعة $m \times n$ وبين مجموعة التطبيقات الخطية من V الى W بالنسبة لقاعدتين مفروضتين في V و W .

بصورة عامـة ، للوصول الى التطبيق الخطي T_A الموافق لمصفوفة مفروضة $A = (\alpha_j{}^i)$ من السعة $m \times n$ على الحقل K يكفي أن نختار فراغين شعاعيين عدد أبعاد الأول n وعدد أبعاد الثاني m ، كأن نختار هـذين الفراغين $V_n(K) = K^n$ و $V_m(K) = K^m$ مثلاً . نأخذ قاعدة $\{v_j\}$ في الفراغ الشعاعي الأول وقاعدة $\{ w_i \}$ في الفراغ الشعاعي الثـاني .

فالتطبيق $T : K^n \to K^m$ المعرف بالعلاقة :

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j^{\,i} w_i \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

هو تطبيق خطي وحيد ، استناداً للنظرية [٢ - ٧] ، والمصفوفة الموافقة له هي المصفوفة المفروضة A .

٤ - ٧ تساوي المصفوفات : ليكن V , W فراغين شعاعين على الحقل K ، عدد أبعادهما n , m على الترتيب . ليكن T , F تطبيقين خطيين من V الى W . لنفرض أن $A = (\alpha_j^{\,i})$ و $B = (\beta_j^{\,i})$ المصفوفتان الموافقتان لـ T و F بالنسبة لقاعدتين مفروضتين $\{ v_j \}$ و $\{ w_i \}$ في V , W على الترتيب .

نقول عن المصفوفتين A و B أنهما متساويتان إذا كان التطبيقان الموافقان T و F متساويين .

نعلم أن $T = F$ تعني أن :

$$\forall v \in V \quad : \quad T(v) = F(v)$$

وبصورة خاصة من أجل أشعة القاعدة $\{ v_j \}$ في V يكون :

$$T(v_j) = F(v_j) \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

ولما كان :

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_j^{\,i} w_i$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_j^{\,i} w_i$$

فإننا نجد أن :

$$\alpha_j^i = \beta_j^i \qquad \begin{matrix} i = 1 , \dots , m \\ j = 1 , \dots , n \end{matrix}$$

ومنه نقول : إن مصفوفتين من سعة واحدة متساويتان إذا كانت العناصر المتشابهة في الموضع في المصفوفتين متساوية .

٥ - ٧ جمع المصفوفات : لتكن $A = (\alpha_j^i)$ و $B = (\beta_j^i)$ المصفوفتين الموافقتين للتطبيقين الخطيين T و F من V الى W بالنسبة للقاعدتين $\{ v_j \}$ ، $\{ w_i \}$ في V و W على الترتيب نعرف مجموع المصفوفتين A و B ونرمز له بـ A + B ، على أنه المصفوفة $C = (\gamma_j^i)$ الموافقة للتطبيق الخطي $T + F : V \rightarrow W$ بالنسبة للقاعدتين المفروضتين أي :

$$(T + F) (v_j) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_j^i \; w_i$$

إن مجموع التطبيقين الخطيين T + F يعطى بالعلاقة :

$$\forall v \in V \;\; : \;\; (T + F) (v) = T (v) + F (v)$$

وبصورة خاصة من أجل أشعة القاعدة $\{v_j\}$ في V نجد :

$$\begin{aligned} (T + F) (v_j) &= T (v_j) + F (v_j) \\ &= \sum_i \alpha_j^i \, w_i + \sum_i \beta_j^i \, w_i \\ &= \sum (\alpha_j^i + \beta_j^i) \, w_i \end{aligned}$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$\gamma_j^i = \alpha_j^i + \beta_j^i$$

ومنه : مجموع مصفوفتين من سعة واحدة هو مصفوفة من السعة ذاتها وعناصرها مؤلفة من مجموع عناصر المصفوفتين المتشابهة في الموضع .

نستنتج من التعريف السابق ما يلي :

(١) عملية جمع المصفوفات تبديلية . إذا كانت A و B مصفوفتين من سعة واحدة فان :

$$A + B = B + A$$

(٢) عملية جمع المصفوفات تجميعية . إذا كانت A و B و C ثلاث مصفوفات من سعة واحدة فان :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(٣) إذا كانت A و B مصفوفتين من سعة واحدة فاستناداً الى تعريف منقول مصفوفة نجد :

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

أي منقول مصفوفتين يساوي مجموع منقولي المصفوفتين .

(٤) إذا رمزنا بـ O للمصفوفة الصفرية فإن :

$$\forall A \quad , \quad A + O = O + A = A$$

أي أن المصفوفة الصفرية تمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع على المصفوفات .

مثال : إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$A + B = B + A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

وأن :

$$B^t = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد :

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = [A + B]^t$$

وإذا كانت $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن :

$$B + C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ومنه نجد :

$$(A + B) + C = A + (B + C) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

٦ - ٧ ضرب مصفوفة بعنصر من الحقل : لتكن $A = (\alpha_j^i)$

مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K مرافقة للتطبيق الخطي $T : V \rightarrow W$ بالنسبة للقاعدتين $\{v_j\}$ و $\{w_i\}$ في V و W على الترتيب . إذا كان $\lambda \in K$ ، فإننا نرمز بـ λA للمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي λT بالنسبة للقاعدتين المفروضتين . إن λT معرف ، كما نعلم ، بالعلاقة :

$$\forall v \in V \quad : \quad (\lambda T)(v) = \lambda (T(v))$$

ومن أجل أشعة القاعدة $\{v_j\}$ نجد :

$$(\lambda T)(v_j) = \lambda (T(v_j)) = \lambda \sum_i \alpha_j^i w_i$$

$$= \sum_i (\lambda \alpha_j^i) w_i$$

ومنه نجد :

$$\forall \lambda \in K \; , \quad \lambda A = \lambda (\alpha_j^i) = (\lambda \alpha_j^i)$$

أي أن جداء مصفوفة A على الحقل K بعنصر كيفي λ من K هو مصفوفة تنتج عناصرها عن عناصر المصفوفة A بضربها بالعنصر λ .

في الحالة $\lambda = -1$ نحصل على المصفوفة $(-1)A = (-\alpha_j^i)$ ولو رمزنا لهذه المصفوفة بـ $-A$ فإننا نسميها نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية جمع المصفوفات لأن $A + (-A) = O$ المصفوفة الصفرية .

نجد من تعريف منقول المصفوفة :

$$\forall \lambda \in K \; , \; \forall A \quad : \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$$

مثال : لتكن المصفوفة A على الحقل C (حقل الأعداد المركبة)

المعرفة بالشكل :

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 2-i \end{bmatrix} , \quad i^2 = -1$$

إذا كان $\lambda = 1 - i$ من C فإن :

$$\lambda A = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) & (1-i)\,2i \\ -(1-i)\,i & (1-i)(2-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2+2i \\ -1-i & 1-3i \end{bmatrix}$$

إن منقول المصفوفة A هي المصفوفة :

$$A^t = \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 2i & 2-i \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\lambda A^t = \begin{bmatrix} (1-i)(1+i) & -(1-i)\,i \\ 2(1-i)\,i & (1-i)(2-i) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1-i \\ 2+2i & 1-3i \end{bmatrix} = (\lambda A)^t$$

إذا رمزنا بـ $L(m, n)$ لمجموعة المصفوفات من السعة $m \times n$ على الحقل التبديلي K فان [٥ - ٧] و [٦ - ٧] تعرفان عمليتي جمع وضرب بعنصر من الحقل K على المجموعة $L(m, n)$. ويمكن بسهولة التحقق من أن الخواص ج١ - ج٥ و ض١ - ض٥ من [٢ - ٥] محققة وبالتالي نحصل على النظرية :

٧ - ٧ نظرية : تشكل المجموعة $L(m, n)$ المزودة بعمليتي الجمع والضرب بعنصر من K المعرفتين في [٧ - ٥] و [٧ - ٦] فراغاً شعاعياً على الحقل K .

٧ - ٨ **جداء المصفوفات** : ليكن U و V و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل K ، عدد أبعادها p و n و m على الترتيب . ليكن التطبيقان الخطيان $T : U \rightarrow V$ و $F : V \rightarrow W$. إذا كانت $\{u_i\}$ قاعدة في U و $\{v_j\}$ قاعدة في V و $\{w_k\}$ قاعدة في W ، حيث $i = 1, \ldots, p$ و $j = 1, \ldots, n$ و $k = 1, \ldots, m$ ، فيوجد مصفوفتان استناداً للنظرية [٧ - ٢] ، $A = [\alpha_i{}^j]$ من السعة $n \times p$ و $B = [\beta_j{}^k]$ من السعة $m \times n$ على الحقل K موافقتين لـ T و F على الترتيب ، أي :

$$T(u_i) = \sum_j \alpha_i{}^j v_j \quad , \quad i = 1, \ldots, p$$

$$F(v_j) = \sum_k \beta_j{}^k w_k \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

إن التطبيق المركب $F \circ T$ ، استناداً لخواص تركيب التطبيقات الخطية ، تطبيق خطي من U الى W وبالتالي يوجد مصفوفة $C = [\gamma_i{}^k]$ من السعة $m \times p$ على K موافقة للتطبيق المركب $F \circ T$ أي :

$$(F \circ T)(u_i) = \sum_k \gamma_i{}^k w_k$$

نسمي هذه المصفوفة $C = [\gamma_i{}^k]$ بمصفوفة حاصل الضرب $B . A$ للمصفوفة A بالمصفوفة B . ولكتابة عناصر المصفوفة C بدلالة عناصر المصفوفتين A و B ، نكتب :

$$(F \circ T)(u_i) = F(T(u_i))$$ (حسب تعريف تركيب التطبيقات)

$$= F(\Sigma\, \alpha_i^j v_j)$$

$$= \Sigma\, \alpha_i^j F(v_j)$$ (F تطبيق خطي)

$$= \Sigma\, \alpha_i^j \sum_k \beta_j^k w_k$$

$$= \sum_{j,k} \alpha_i^j \beta_j^k w_k$$

$$= \sum_k \left(\sum_j \beta_j^k \alpha_i^j \right) w_k$$

وبالمقارنة نجد أن :

$$\gamma_i^k = \Sigma\, \beta_j^k \alpha_i^j$$

وإذا رمزنا بـ B^k لأشعة أسطر المصفوفة B و بـ A_i لأشعة أعمدة المصفوفة A فإننا نجد أن $\gamma_i^k = B^k . A_i$ (الجـــداء العددي للشعاعين) وبالتالي لامكن كتابة :

$$C = B . A = \begin{bmatrix} B^1 A_1 & B^1 A_2 & \dots & B^1 A_p \\ B^2 A_1 & B^2 A_2 & \dots & B^2 A_p \\ \vdots & & & \\ B^m A_1 & B^m A_2 & \dots & B^m A_p \end{bmatrix}$$

مثال : ليكن U و V و W ثلاثة فراغات شعاعية على الحقل R ، عدد أبعادها 2 , 3 , 4 على الترتيب . لتكن (u_1 , u_2) قاعدة في U و (v_1 , v_2 , v_3) قاعدة في V و (w_1 , w_2 , w_3 , w_4) قاعدة في W .

ليكن $T : U \longrightarrow V$ تطبيقاً خطياً معطى بالشكل :

$$T(u_1) = 3\,v_1 - 2\,v_2 + v_3$$

$$T(u_2) = 4\,v_1 + v_2$$

وليكن $F : V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً معطى بالشكل :

$$F(v_1) = w_1 + w_2 + w_3 - w_4$$

$$F(v_2) = 2\,w_1 - w_2 + w_3$$

$$F(v_3) = 2\,w_1 - w_3 + 4\,w_4$$

إن المصفوفة المرافقة لـ T هي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة المرافقة لـ F هي :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الجداء :

$$B\,.\,A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

ويمكن التحقق مباشرة من أن هذه المصفوفة هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي المركب $F \circ T$.

نورد ، استناداً الى التعريف السابق ، الخواص التالية تاركين البرهان عليها للقارىء لسهولتها .

٩ - ٧ إن عملية الجداء BA للمصفوفتين A و B غير معرفة إلا إذا كان عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد أسطر المصفوفة A .

١٠ - ٧ إن عملية ضرب المصفوفات غير تبديلية . ففي المثال السابق نلاحظ أن AB غير معرفة لان عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد أسطر B . وحتى في حالة كون AB معرفـــة فان $AB \neq BA$ في الحالة العامة .

مثال : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ فإن :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أن $AB \neq BA$.

١١ - ٧ عملية ضرب المصفوفات تجميعية . اذا كانت A و B و C ثلاث مصفوفات على الحقل K والجداءان AB و BC معرفين فإن

الجداءين $(AB)C$ و $A(BC)$ معرفان ويكون :

$$(A B) C = A (B C)$$

١٢ - ٧ عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الجمع على المصفوفات .

إذا كانت A و B و C ثلاث مصفوفات وكانت $B + C$ و AB معرفة فان :

$$A (B + C) = A B + A C$$

وإذا كانت D مصفوفة أخرى بحيث يكون BD معرفاً فان :

$$(B + C) D = B D + C D$$

١٣ - ٧ إذا كان الجداء AB معرفاً فان ، إستناداً لتعريف منقول مصفوفة ، الجداء $B^t A^t$ معرفاً ويكون :

$$(A B)^t = B^t A^t$$

١٤ - ٧ **ملاحظة** : يمكن أن يكون جداء مصفوفتين هي المصفوفة الصفرية دون أن تكون أي من هاتين المصفوفتين المصفوفة الصفرية . وعلى سبيل المثال الجداء :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فراغ المصفوفات المربعة :

لتكن $L(n, n)$ مجموعة المصفوفات المربعة ذات السعة $n \times n$ على

الحقل **K** والمزودة بعمليتي الجمـــع والضرب بعنصر من K المعرفتين في [٧-٥] و [٧-٦] .

يمكن أن نعتــبر أن كل عنصر من $L(n\times n)$ (أي كل مصفوفة من السعة $n\times n$) هو المصفوفة الموافقة لتطبيق خطي من فراغ شعاعي $V(K)$ عدد أبعاده n الى الفراغ $V(K)$ ذاته بالنسبة لقاعدة مختـارة في $V(K)$. إذا كانت $I \in L(n,n)$ المصفوفة الواحدة فإننا نجد ، استناداً لتعريف جداء المصفوفات ، ما يلي :

$$\forall A \in L(n,n) \quad , \quad IA = AI = A \qquad (١)$$

$$\forall A, B \in L(n,n) \quad , \quad AB \in L(n,n) \qquad (٢)$$

نستنتج أن عملية ضرب المصفوفات عملية داخلية على $L(n,n)$ ولهـا عنصر محايد I . إذن $L(n,n)$ المزودة بعمليتي جمع وضرب المصفوفات تشكل حلقة واحدية . أضف الى ذلك أنه يمكن بسهولة إثبات العلاقة :

$$\forall \lambda \in K \quad , \quad \forall A, B \in L(n,n) \quad ,$$
$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

ومنه :

١٥ - ٧ **نظرية** : تشكل $L(n,n)$ مجموعة المصفوفات المربعة من السعة $n\times n$ والمزودة بعمليتي جمع وضرب المصفوفات ، جـــبراً على الحقل K .

١٦ - ٧ **تعريف** : نقول عن مصفوفة مربعـة $A=[\alpha_j^i]$ أنهـــا متناظرة إذا كانت $A^t = A$ أي إذا كان :

$$\alpha_j^{\,i} = \alpha_i^{\,j} \quad , \quad i , j = 1 , \ldots , n$$

فمثلًا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ متناظرة لأن $A = A^t$.

١٧ - ٧ تعريف : نقول عن مصفوفة مربعة A أنها منتظمة أو غير شاذة) إذا كان التطبيق الخطي المرافق لها T_A تطبيقاً منتظماً . وإلا نقول عن A أنها شاذة .

ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل K عـــدد أبعاده n . لتكن $\{ v_i \}$ و $\{ v_i' \}$ قاعدتين في V . يوجد ، استناداً للنظرية [١٠ - ٦] تطبيق خطي وحيد $T : V \to V$ بحيث يكون :

$$T (v_i) = v_i' \quad , \quad i = 1 , \ldots , n$$

ويمكن بسهولة إثبات أن T هذا تطبيق منتظم (متباين وغامر) .

إن كل عنصر من إحدى القاعدتين المفروضتين في V يمكن أن يمثل بشكل وحيد بتركيب خطي في عناصر القاعدة الثانية . فإذا كتبنا :

$$\text{(I)} \qquad v_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^{\,j} v_j \quad , \quad i = 1 , \ldots , n$$

$$\left(v_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_i^{\,j} v_j \right)$$

فنجد أن المصفوفة $A = [\alpha_j^{\,i}]$ هي المصفوفة المرافقـة للتطبيق الخطي المنتظم T بالنسبة للقاعدة $\{ v_i \}$ وذلك لأن : $T(v_i) = \sum_j \alpha_i^{\,j} v_j$.

إذن المصفوفة A منتظمة ونسميها مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{ v_i \}$ الى القاعدة $\{ v_i' \}$.

بصورة مشابهة ، يوجد تطبيق خطي وحيد $F : V \to V$ من الشكل

$$F(v_i') = v_i \quad , \quad i = 1 , \ldots , n$$

وأن هذا التطبيق منتظم (لماذا ؟) وأن المصفوفة $B = [\beta_i^j]$ هي المصفوفة الموافقة لـ F (لماذا ؟) وبالتالي فإن B مصفوفة منتظمة نسميها مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{ v_i' \}$ الى القاعدة $\{ v_i \}$. ومن الواضح أن :

$$F o T = T o F = I \qquad \text{(التطبيق المطابق)}$$

وبالتالي فان F هو التطبيق الخطي المعاكس للتطبيق الخطي T .

ونجد أيضاً أن الجداء :

$$A B = B A = I \qquad \text{(مصفوفة الواحدي)}$$

المعينــــات :

نتج مفهوم المعين عن دراسة جمل المعادلات الخطية ثم تطور بعد ذلك حتى شملت تطبيقاته مواضيع رياضية عديدة ، فلم يقتصر المعين على كونه وسيلة سريعة ومريحة في مناقشة حلول جمل المعادلات الخطية بل يعيننا في دراسة الاستقلال الخطي للأشعة وفي رتب المصفوفات وغيرها .

١٨ - ٧ تمهيد : لنذكر القارىء قبل البدء في بحث المعينات بالتبديل [١٢ - ٣] الذي نقابل فيه بين مجموعة ونفسها مثال ذلك :

$$\{ 1 , 2 , 3 \} \to \{ 3 , 1 , 2 \}$$

حيث نقابل 1 بـ 3 و 2 بـ 1 و 3 بـ 2 .

سنقصر اهتمامنا فيما يلي على تباديل المجموعة :

$$\{ 1 , 2 , \ldots , n \}$$

لنفرض أننا بادلنا بين مواقع هذه الأعداد فأخذت هذه المجموعة شكلاً نمثله بـ :

$$\{ i_1 , i_2 , \ldots , i_n \}$$

من الممكن أن نعتبر بأن هناك تطبيقاً S نسميه تبديلاً بحيث يكون :

$$S : \{ 1 , 2 , \ldots , n \} \rightarrow \{ i_1 ; i_2 , \ldots , i_n \}$$

وهو يقابل 1 بـ i_1 و 2 بـ i_2 و ... n بـ i_n .

نسمي $\{ i_1 , i_2 , \ldots , i_n \}$ متبادلة للمجموعة المرتبة $A = \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$ التي نسميها بالمتبادلة الرئيسية . ومن المعلوم أن عدد متبادلات A هو $n!$.

إذا بادلنا بين موقعي عنصرين من متبادلة ما فإننا نقول إننا أجرينا مناقلة ونقول عن مناقلة إنها بسيطة إذا كان العنصران متجاورين في المتبادلة المفروضة ومن الواضح أنه يمكن تركيب أي مناقلة من جملة من المناقلات البسيطة وأن كل متبادلة تنتج عن المتبادلة الأساسية بعدد من المناقلات البسيطة .

إذا كانت لدينا المتبادلة $\{ i_1 , i_2 , \ldots , i_n \}$ ، وإذا وجد فيها عددان i_j و i_k بحيث يكون : $i_j > i_k$ و $j < k$ قلنا أن في هذه المتبادلة انقلاباً ومن الواضح أن كل متبادلة تحوي عدداً معيناً من الانقلابات .

فمثلاً تحوي المتبادلة $\{ 4 , 3 , 1 , 2 \}$ خمسة انقلابات هي :

$4, 3 - , 4, 1 - 4, 2 - 3, 1 - , 3, 2$

أما المتبادلة $\{1, 2, \ldots, n\}$ التي نسميها المتبـــادلة الرئيسية فهي لا تحوي أي انقلاب .

إن كل مناقلة في مجموعة تغير عدد الانقلابات التي تحويها .

نقول عن متبادلة إنها فردية إذا كان عدد انقلاباتها فردياً ونقول عنها إنها زوجية إذا كان عدد انقلاباتها زوجياً . إن المتبادلة $\{3, 2, 1\}$ فردية والمتبادلة $\{3, 1, 2\}$ زوجية .

إذا كانت المتبادلة $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ فردية (زوجيـة) وأجرينا فيها مناقلة فإنها تصبح زوجية (فردية) . لبرهان ذلك نفرض أننـــا بادلنا بين العنصرين i_j, i_{j+k} وذلك بأن ننقل i_{j+k} لنضعه على يسـار i_j ونحتاج من أجل هذا الى k مناقلة بسيطة ثم ننقل i_j ليقع في الموضع الذي كان يشغله i_{j+k} ونحتاج من أجل هذا الى $k - 1$ مناقـــلة بسيطة ويكون مجموع المناقلات البسيطة الضرورية لهذا الانتقال هو $2k - 1$ وهو عدد فردي .

يمكننا أن ننتقل من متبادلة الى المتبادلة الأساسية بعدد من المناقلات البسيطة ويتم هذا الأمر بأشكال مختلفة : فيمكننا مثلاً أن ننتقل من $\{1, 3, 2\}$ الى $\{1, 2, 3\}$ بمناقلة بسيطة واحدة وهي أن نبادل بين موضعي $3, 2$ كما يمكننا أن نقوم بذلك بخمس مناقلات بسيطة وفق الشكل :

$$\{1, 3, 2\} \rightarrow \{3, 1, 2\} \rightarrow \{3, 2, 1\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$$

$$\rightarrow \{2, 1, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

غير أنه من الواضح أن هـذا العدد فردي. دوماً إذا كانت المتبادلة فردية وهو زوجي دوماً إذا كانت المتبادلة زوجية ، لأنه لو كانت المتبادلة فردية واحتجنا الى عدد زوجي من المناقلات البسيطة لنجعل هذه المتبادلة المتبادلة الأساسية فإن المتبادلة الناتجة (المتبادلة الأساسية) تصبح فردية وهذا ينافي كون المتبادلة الاساسية لاتحوي أي انقلاب وهي متبادلة زوجية .

١٩ - ٧ التطبيق المتعدد الخطية : ليكن E فراغاً شعاعياً معرفاً على الحقل التبديلي K و f تطبيقاً لـ E^p في K يربط بين كل عنصر من E^p مثل $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ بعنصر من K نرمز له بـ :

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

نقول عن هذا التطبيق f إنه متعدد الخطية من المرتبة p فيما إذا كان خطياً بالنسبة لكل شعاع من الأشعة $a_1, a_2, \ldots, a_p$ أي إذا فرضنا $a_J = a'_J + a''_J$ فإنه يكون :

$$f(a_1, a_2, \ldots, a'_J + a''_J, \ldots, a_p) = f(a_1, a_2, \ldots, a'_J, \ldots, a_p) + f(a_1, a_2, \ldots, a''_J, \ldots, a_p)$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, \lambda a_J, \ldots, a_p) = \lambda f(a_1, a_2, \ldots, a_J, \ldots, a_p)$$

وذلك مهما كان $\lambda \in K$.

لحساب $f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ نفرض $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ قاعدة قانونيـــة للفراغ الشعاعي E وأن a_k معرف بمركباته على هـذه القاعدة بالشكل :

$$a_j = (\alpha_j^1, \alpha_j^2, \ldots, \alpha_j^n) = \sum_{i_j = 1}^{n} \alpha_j^{i_j} e_{i_j}$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p) = \sum_{i_1=1}^{n} \alpha_1^{i_1} f(e_{i_1}, a_2, \ldots, a_p)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_1^{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_2^{i_2} f(e_{i_1}, e_{i_2}, a_3, \ldots, a_p)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \alpha_1^{i_1} \sum_{i_2=1}^{n} \alpha_2^{i_2} \ldots \sum_{i_p=1}^{n} \alpha_p^{i_p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p})$$

٢٠ - ٧ التطبيق المتعدد الخطية المتناوب : نقول عن التطبيق المتعدد الخطية :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p) \rightarrow f(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

إنه متناوب فيما إذا كان :

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_p) = 0$$

إذا وجد عددان غير متساويين i, j بحيث يكون $a_i = a_j$.

إذا فرضنا $a_j = a_i = x + y$ فسوف يكون استناداً الى كون f تطبيقاً خطياً .

$$f(a_1, \ldots, x+y, \ldots, x+y, \ldots, a_p) = f(a_1, \ldots, x, \ldots, x, \ldots, a_p)$$
$$+ f(a_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, a_p) + f(a_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_p)$$
$$+ f(a_1, \ldots, y, \ldots, y, \ldots, a_p)$$

إن القيمتين الأولى والأخيرة من القيم الأربعة السابقة معدومتان لأنهما تحويان متحولين متساويين ويبقى لدينا :

$$f(a_1, \ldots, y, \ldots, x, \ldots, a_p) + f(a_1, \ldots, x, \ldots, y, \ldots, a_p) = 0$$

وهذا يعني أنه إذا بادلنا بين متحولين من متحولات تطبيق متعدد الخطية ومتناوب فإن قيمة هذا التطبيق تغير إشارتها .

٢١ ـ ٧ **تعريف المعين** : لتكن A مصفوفة مربعة من السعة n نرمز لأشعة أعمدتها بـ A_i ونكتبها بدلالة هذه الاعمدة بالشكل :

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \qquad (3)$$

لنعرف تطبيقاً نرمز له بـ det على مجموعة المصفوفات المربعة ذات السعة n بحيث نقابل كل مصفوفة A بعنصر من K ، الحقل الذي عرفت عليه مجموعة المصفوفات المذكورة ، أي :

$$\det(A) = \Delta(A) \quad , \quad \Delta(A) \in K$$

ونشترط أن يحقق هذا التطبيق الشروط التالية :

(آ) ـ إن التطبيق det متعدد الخطية ومتناوب .

(ب) ـ إذا رمزنا بـ I_n لمصفوفة الواحدة في مجموعة المصفوفات المربعة ذات السعة n فإن :

$$\det(e_1, e_2, \ldots e_n) = \Delta(I_n) = 1 \qquad (4)$$

٢٢ ـ ٧ **نظرية** : إن التطبيق المعرف سابقاً موجود وهذا يعني أنه يربط كل مصفوفة مربعة من السعة n بعنصر من K وهذا العنصر وحيد .

في الحقيقة لتكن المصفوفة :

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

ولنفرض :

$$A_1 = (\alpha_1^1 , \alpha_1^2 , \ldots , \alpha_1^n)$$

$$A_2 = (\alpha_2^1 , \alpha_2^2 , \ldots , \alpha_2^n)$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad .$$

$$A_n = (\alpha_n^1 , \alpha_n^2 , \ldots , \alpha_n^n)$$

وإذا فرضنا $(e_1 , e_2 , \ldots , e_n)$ قاعدة في الفراغ الشعاعي E الذي عرفت عليه المصفوفة A فانه يكون :

$$\det (A) = \det (\alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \ldots + \alpha_1^n e_n , \ldots ,$$
$$\alpha_n^1 e_1 + \alpha_n^2 e_2 + \ldots + \alpha_n^n e_n)$$

إذا نشرنا هذا التركيب باعتبار det تطبيقاً متعدد الخطية فاننا نجد شكلا يشبه التركيب (2) . يتكون هذا التركيب من n^n حداً من الشكل :

$$\alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \ldots \alpha_{i_n}^n \det (e_{i_1} , e_{i_2} , \ldots , e_{i_n})$$

حيث $(i_1 , i_2 , \ldots , i_n)$ عناصر كيفية من المجموعة $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ بما أننا فرضنا det متناوب فان كل هذه الحدود معدومة إلا الحدود التي تكون فيها العناصر $(i_1 , i_2 , \ldots , i_n)$ متباينة مثنى مثنى أي فيما إذا كانت إحدى متبادلات المجموعة $\{1 , 2 , \ldots , n\}$.

وإذا لاحظنا ان المتبادلة $\{i_1 , i_2 , \ldots , i_n\}$ تنتج عن المتبادلة الاساسية $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ بعدد من الانقلابات نرمز له بـ ν فإنه يكون :

$$\det (e_{i_1} , e_{i_2} , \ldots , e_{i_n}) = (-1)^\nu \det (e_1 , e_2 , \ldots , e_n) = (-1)^\nu$$

إذا فرضنا $\sigma(1)=i_1 , \sigma(2)=i_2 ; \ldots , \sigma(n)=i_n$ واعتبرنا σ ممثلاً لعنصر من G_n مجموعـــة متبادلات $(1 , 2 , \ldots , n)$ وإذا فرضنـــا $\varepsilon_\sigma = (-1)^\nu$ فإنه يكون :

$$\det A = [\sum_{\sigma \in G_n} \varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)}^{\ 1} \alpha_{\sigma(2)}^{\ 2} \ldots \alpha_{\sigma(n)}^{\ n}] \qquad (5)$$

وبما الطرف الايمن معين تماماً والمصفوفة A مصفوفة كيفية من مجموعة المصفوفات المربعة من السعة n فان التطبيق det موجود . ويمكننا أن نبرهن بسهولة أن التطبيق det بالشكل (5) متعدد الخطية ومتناوب .

كما يمكننا أن نبرهن أن :

$$g(e_1 , e_2 , \ldots , e_n) = \mu \Rightarrow g(A_1 , A_2 , \ldots , A_n) =$$
$$= \mu \det (A_1 , A_2 , \ldots , A_n)$$

وهذا يؤدي الى أنه إذا كان g تطبيقاً متعدد الخطية يحقق العلاقة :

$$g(e_1 , e_2 , \ldots , e_n) = 1$$

فإن $g = \det$ وهذا مايبرهن على أن التطبيق det وحيد .

ننسب عادة المعين الى رتبة مصفوفته فنقول معين من الدرجة n عندما يتعلق بمصفوفة مربعة منتظمة من السعة $n \times n$.

٢٣ - ٧ أمثـــلة : (١) إذا كانت المصفوفة A من السعة 2×2 فإننا نستنتج من (5) أن :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 \cdot \alpha_2^2 - \alpha_2^1 \cdot \alpha_1^2$$

وذلك لان G_2 تحوي متبادلتين فقط هما (1 , 2) ، (2 , 1) الاولى زوجية والثانية فردية .

نرمز عادة لمعين المصفوفة A بجدول المصفوفة ذاته موضوعاً بين قطعتين مستقيمتين شاقولتين أي :

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix} = \alpha_1^1 \cdot \alpha_2^2 - \alpha_2^1 \cdot \alpha_1^2$$

(٢) إذا كانت المصفوفة A من السعة 3×3 ورمزنا لعنصر منهـــا بـ α_J^I فإنه يكون للمجموعـــة { 1 , 2 , 3 } ست متبادلات ثلاث منها زوجية وهي :

$$\{1,2,3\} \;,\; \{2,3,1\} \;,\; \{3,1,2\}$$

وثلاث منها فردية وهي :

$$\{1,3,2\} \;,\; \{2,1,3\} \;,\; \{3,2,1\}$$

وتكون عندها قيمة المعين من الدرجة الثالثة :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 \cdot \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 + (-1)^2 \cdot \alpha_2^1 \alpha_3^2 \alpha_1^3 + (-1)^2 \cdot \alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3$$

$$+ (-1)^1 \cdot \alpha_1^1 \alpha_3^2 \alpha_2^3 + (-1)^3 \cdot \alpha_2^1 \alpha_1^2 \alpha_3^3 + (-1)^3 \cdot \alpha_3^1 \alpha_2^2 \alpha_1^3$$

$$= \alpha_1^1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 + \alpha_2^1 \alpha_3^2 \alpha_1^3 + \alpha_3^1 \alpha_1^2 \alpha_2^3$$

$$- \alpha_1^1 \alpha_3^2 \alpha_2^3 - \alpha_2^1 \alpha_1^2 \alpha_3^3 - \alpha_3^1 \alpha_2^2 \alpha_1^3$$

بعض الخواص الرئيسية للمعينات :

٢٤ - ٧ اذا كانت A مصفوفة من السعة $n \times n$ واذا كان A^t منقول هذه المصفوفة فان :

$$\det A = \det A^t$$

البرهان : لنأخذ حد من حدود منشور المعين المتعلق بـ A ولنفرضه من الشكل .

$$\varepsilon_\sigma \alpha_{\sigma(1)}{}^1 \alpha_{\sigma(2)}{}^2 \ldots \alpha_{\sigma(n)}{}^n \qquad (1)$$

لنبادل بين مواضع المضاريب فيه بحيث تصبح فيه الادلة الدنيا مرتبة وفق الترتيب الطبيعي ($1, 2, \ldots, n$) فتأخذ عندها الادلة العليا شكلاً جديداً نفرضه $\tau(n) \ldots \tau(2)\ \tau(1)$ ومن الواضح أنه اذا كان عدد انقلابات المتبادلة σ زوجياً فإن عـدد انقلابات τ زوجياً وإذا كان العدد الاول فردياً فان الثاني فردي أيضاً وذلك لان الانتقال من σ الى المتبـادلة الاساسية يجري بعدد من الانقلابات يساوي عدد الانقلابات التي تنقلنا من المتبادلة الاساسية الى المتبادلة τ . ان هذا يؤدي الى أن $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau$ حسب تعريف هذا الرمز ويأخذ الحد المذكور الشكل التالي :

$$\varepsilon_\tau \alpha_1{}^{\tau(1)} \alpha_2{}^{\tau(2)} \ldots \alpha_n{}^{\tau(n)} \qquad (2)$$

إن هذا هو الحد المقابل من منشور $\det A^t$ للحـد (١) من منشور (١) وهما متساويان كما برهنا وبهذا يثبت المطلوب .

٢٥ - ٧ نتيجة : يمكن استناداً الى هـــذه النظرية أن نبـدل في

تعريف المعين وفي كل من النظريتين التاليتين كلمة سطر بكلمة عمود .

٢٦ - ٧ إذا كانت B مصفوفة نتجت عن مصفوفة مربعة A باضافة أحد أعمدتها بعد ضرب مركباته بعنصر $k \neq 0$ من الحقل K فان $\det B = \det A$.

$$\det B = \det(\ldots, A_i + k\,A_j, \ldots, A_j, \ldots)$$
$$= \det(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) + k \det(\ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots)$$
$$= \det A$$

٢٧ - ٧ إذا كان أحد أعمدة المصفوفة A صفراً فانه $\det A = 0$:

$$\det(A_1, \ldots, 0, \ldots, A_n) = \det(A_1, \ldots, 0\,b, \ldots, A_n) =$$
$$= 0 \,.\, \det(A_1, \ldots, b, \ldots, A_n) = 0$$

حيث يمكن كتابة كل شعاع صفري على شكل جداء العنصر الصفري من الحقل K بشعاع كيفي .

وهكذا يمكننا اعتماداً على التعريف وعلى النظريات الأخيرة أن نلخص الخواص الرئيسية للمعين بما يلي .

(١) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بمبادلة أسطرها مع أعمدتها (مع المحافظة على الترتيب) فإن $\det A = \det B$.

(٢) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بمبادلة سطرين (عمودين) فإن $\det B = -\det A$.

(٣) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بضرب

جميع عناصر سطر (عمود) بعنصر k من K غير صفري فإن :
. $\det B = k \det A$

(٤) إذا كانت B المصفوفة الناتجة عن المصفوفة المربعة A بضرب جميع عناصر سطر (عمود) بعنصر من K ثم بجمع هذه العناصر الى العناصر المقابلة من سطر (عمود) آخر فان $\det B = \det A$.

(٥) إذا كانت أسطر مصفوفة مربعة A أو أعمدتها مرتبطة خطياً فان $\det A = 0$ وبشكل خاص إذا تطابق سطران (عمودان) في مصفوفة A أو إذا كانت جميع عناصر أحد الاسطر (أحد أعمدة) أصفاراً فإن $\det A = 0$.

وعلى العكس إذا كان $\det A \neq 0$ فان أسطر المصفوفة A (وأعمدتها كذلك) مستقلة خطياً أي أن المصفوفة A منتظمة .

ضرب المعينات :

٢٨ - ٧ إذا كان A و B مصفوفتين من السعة $n \times n$ معرفتين على حقل واحد K فان :

$$\det(B . A) = \det(B) . \det(A)$$

البرهان : لنرمز بـ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ لاعمدة A فيكون استناداً الى تعريف ضرب المصفوفات [٨-٧] .

$$B . A = (B . A_1 , B . A_2 , \ldots , B . A_n)$$

حيث اعتبرنا A_i مصفوفة من السعة $n \times 1$.

لنعتبر B ثابتاً و A متحولا ولنعرف التطبيق :

$$(1) \qquad f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \det(B A_1, B A_2, \ldots, B A_n)$$

نبرهن استناداً الى كون det تابعاً متعدد الخطية ومتناوباً على أن f متعدد الخطية ومتناوب ونتوصل بالطريقة التي قدمناها في [٧-٢٢] الى :

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = f(I_n) \cdot \sum_{\tau \in G_n} \varepsilon_\tau \, \alpha_1^{\tau(1)} \alpha_2^{\tau(2)} \cdots \alpha_n^{\tau(n)}$$

$$= f(I_n) \det(A) \; .$$

حيث I_n مصفوفة الواحدة من المرتبة n .

إذا استعضنا في العلاقة (1) عن A بـ I_n فسوف نجد :

$$f(I_n) = \det(B e_1 + B e_2 + \ldots + B e_n) = \det(B)$$

وذلك لان :

$$B e_1 = B_1 \; , \; B \; e_2 = B_2 \; \ldots , \; B \; e_n = B_n$$

حيث تعتبر e_i مصفوفة ذات عمود واحد كل عناصرها معدومة إلا العنصر ذي الرقم i فانه يساوي الواحد .

نتيجة لما تقدم تأخذ العلاقة (2) الشكل التالي :

$$f(A) = \det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$$

وهو المطلوب .

نشر المعين وفق عناصر سطر (أو عمود) :

٢٩ - ٧ تعريف : نسمي المصفوفة الناجـــة عن المصفوفة المربعة

$A = [\alpha_i^k]$ بحذف السطر والعمود اللذين يحويان α_i^k صغير العنصر α_i^k ونسمي حاصل ضرب معين هـذا الصغير بـ $(-1)^{i+k}$ المتمم الجبري لـ α_i^k ونرمز له بـ A_i^k .

فالمصفوفة $\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{bmatrix}$ هي غير العنصر α_3^2 من المصفوفة $\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{bmatrix}$ كما أن $(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{vmatrix}$ هو المتمم الجبري A_3^2 .

٣٠ ـ ٧ نظرية : إن :

$$\det A = \alpha_1^k A_1^k + \alpha_2^k A_2^k + \dots + \alpha_n^k A_n^k$$

أي لحساب معين مصفوفة يكفي أن نضرب عناصر أحد الأسطر بالمتممات الجبرية الموافقة لها ثم نجمع الناتج (تسمى هذه القاعدة نشر المعين وفق عناصر السطر ذي الرقم k) .

البرهان : لنعرف تطبيقاً f على مجموعة المصفوفات المربعـة من السعة $n \times n$ والتي تنتمي مركباتهـا الى الحقل K بحيث تقـابل كل مصفوفة $A = (A_1 ; A_2 , \dots , A_n)$ بعنصر من K هو :

$$\alpha_1^k A_1^k + \alpha_2^k A_2^k + \dots + \alpha_n^k A_n^k$$

أي :

$$f(A) = f(A_1 , A_2 , \dots , A_n) = \alpha_1^k A_1^k + \dots + \alpha_n^k A_n^k$$

فإذا برهنا أن هـــذا التطبيق يحقق جميع الشروط المذكورة في [٢١ - ٧] وبما أن التطبيق الذي يحقق هـــذه الشروط وحيد يكون $f(A) = \det A$ ويتم المطلوب .

لنبرهن أولاً أن التطبيق المذكور متناوب ولنبادل من أجل ذلك بين العمودين الأول والثاني (إن البرهان مماثل لو بادلنـــا بين عمودين كيفيين) فيتبادل بذلك العمودان الاول والثاني في صغيرات العنـاصر $\alpha_3^k , \alpha_4^k , \ldots , \alpha_n^k$ وبالتالي فإن المتممات الجبرية $A_3^k , A_4^k , \ldots , A_n^k$ تغير إشارتها . أما A_2^k , A_1^k فهي تغير إشـارتها كذلك لأن المضروب $(-1)^{i+k}$ الوارد في تعريف المتمم الجبري يغير إشـارته بسبب تبادل موضعي العمودين الأول والثاني وهكذا نجد أن :

$$f(A_2 , A_1 , \ldots , A_n) = - f(A_1 , A_2 , \ldots , A_n)$$

لنبرهن بعد ذلك أنه إذا تطابق العمودان الأول والثاني في A (ان البرهان مماثل لو تطـابق عمودان كيفيان) فإنه يتطابق العمودان الأول والثاني في صغـــيرات العناصر $\alpha_3^k , \alpha_4^k , \ldots , \alpha_n^k$ وبالتالي يكون $A_3^k = A_4^k = \ldots = A_n^k = 0$. أما الحدان الاول والثاني فلا يختلفان عن بعضها (لتطابق العمودين الاول والثاني) إلا بالاشارة وعلى هـذا فإن $f(A) = 0$ عندئذ .

وأما برهان تعدد خطية التطبيق وأن $f(I) = 1$ فنتركه للقارىء .

٣١ - ٧ ملاحظة : بما أن معين مصفوفة يســـاوي معين المصفوفة المنقولة عنها فإننا نستنتج من النظرية الاخيرة ما يلي :

$$\det A = \alpha_k^1 A_k^1 + \alpha_k^2 A_k^2 + \ldots + \alpha_k^n A_k^n$$

أي أنه للحصول على معين مصفوفة نضرب عناصر أحد الاعمدة بالمتممات الجبرية الموافقة ثم نجمع الناتج (تسمى هذه القاعـــدة نشر المعين وفق عناصر العمود ذي الرقم k) .

مثال :

– احسب قيمة المعين :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

لننشر المعين وفق عناصر السطر الثاني فنجد أنه يساوي :

$$6 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -6(1) + 2(2) + 2(-9) = -20$$

لنلاحظ أنه من المفيد أن ننشر المعين وفق عناصر السطر أو عناصر العمود الذي يحوي أكبر عدد ممكن من الاصفار فلو ضربنا السطر الثالث بـ 2 ثم أضفناه للسطر الثاني فإننا نجد أنه يساوي :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 12 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

وبنشر هذا المعين وفق عناصر العمود الثالث نجد :

$$1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} = -20$$

٣٢ - ٧ نتيجـــة :

$$\alpha_1^k A_1^j + \alpha_2^k A_2^j + \ldots + \alpha_n^k A_n^j = 0 \qquad (k \neq j)$$

$$\alpha_k^1 A_j^1 + \alpha_k^2 A_j^2 + \ldots + \alpha_k^n A_j^n = 0 \qquad (k \neq j)$$

البرهان : لتكن A' المصفوفة الناتجة عن A برفع السطر j ووضع السطر k بدلاً منه فعندئذ يتطابق السطران j و k من A' ويكون $\det A' = 0$. لننشر الآن $\det A'$ وفق عناصر السطر k فنحصل على المعادلة الاولى . للحصول على الثانية نسلك الطريق ذاته مستعملين أعمدة A بدلاً من أسطرها .

٣٣ - ٧ نتيجة (٢) : لتكن $\bar{A}$ المصفوفة المنقولة لمصفوفة المتممات الجبرية لـ A أي المصفوفة :

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & A_n^n \end{vmatrix}$$

من الواضح أن $A . \bar{A} = (\det A)\, I_n$ وبالتالي وبفرض $\det A \neq 0$ وبشكل مماثل نجد

$$\frac{\bar{A}}{\det A} . A = I_n$$

٣٤ - ٧ **تعريف** : نقول عن مصفوفة B من السعة $n \times n$ أنها مقلوب أو معكوس المصفوفة A من السعة ذاتها ، إذا تحقق ما يلي :

$$A . B = B . A = I \qquad \text{(I المصفوفة الواحدة)}$$

يرمز عادة للمصفوفة B معكوس المصفوفة A بالرمز A^{-1} وبالتالي تصبح العلاقات السابقة من الشكل :

$$A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$$

ومن النتيجة [٣٣ - ٧] نجد أن مقلوب المصفوفة A هي المصفوفة $A^{-1} = \frac{\bar{A}}{\det A}$.

نستنتج من هذه العلاقة ومن الخاصة (٥) من [٢٧ - ٧] ما يلي :

٣٥ - ٧ **نظرية** : الشرط اللازم والكافي ليكون لمصفوفة مربعة A مقلوب (معكوس) هو أن تكون هذه المصفوفة ، A ، منتظمة .

مثال : أوجد مقلوب المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

إن معين المصفوفة A هو ، كما رأينا ،

$$\det A = -20$$

وأن المتممات الجبرية هي :

$$A_1^1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad , \quad A_2^1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_3^1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -24 \quad , \quad A_1^2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_2^2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad , \quad A_3^2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9 \quad ,$$

$$A_1^3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_2^3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad , \quad A_3^3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

ومنه نجد أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{-20} \begin{bmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -12 & 2 & 4 \\ -24 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

٣٦ ـ ٧ ملاحظة : لحساب معينات المصفوفات من السعة 3×3 نكتب الى يمين المصفوفة العمودين الأول والثاني على التوالي :

$$\begin{matrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{matrix}$$

فاذا أمعنا النظر في النتيجة التي حصلنا عليها في (٢) من [٢٣ ـ ٧] لاحظنا أن الحدود المسبوقة باشارة + هي جداء عناصر القطر الاساسي $\alpha_1^1\ \alpha_2^2\ \alpha_3^3$ وجـداء عناصر القطرين الموازيين له من اليمين .

أما الحدود المسبوقة باشارة − فهي جداء عناصر القطر الثانوي $\alpha_3^1\alpha_2^2\alpha_1^3$ مع جـــداءات عناصر القطرين الموازيين له من اليمين . فلحساب قيمة المعين :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

نكتب الى يمينه العمودين الأول والثاني فنجد :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \\ 3 & -3 \end{matrix}$$

إن جداءات عناصر كل من القطر الأساسي والموازيين له هي 4 , 6− , 0
أما جـداءات عناصر كل من القطر الثـانوي والموازيين له فهي 0 , 12 , 6
ولذلك فان قيمة المعين هي .

$$4 - 6 + 0 - (0 + 12 + 6) = -20$$

بعض تطبيقات المعينات :

١ − في الاستقلال الخطي للأشعة :

٣٧ − ٧ نظرية : الشرط اللازم والكافي كي تكون أعمدة المصفوفة A مرتبطة خطياً هو أن يكون $\det A = 0$.

البرهان : إذا كانت أعمدة A مرتبطـــة خطياً فعندئذ نستطيع أن نكتب أحد أعمدتها وليكن A_1 كتركيب خطي من الاعمدة الاخرى : $A_1 = \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$ وبالتالي يكون :

$$\det (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \det (\lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n, A_2, \ldots, A_n)$$

$$= \lambda_2 \det (A_2, A_2, \ldots, A_n) + \ldots + \lambda_n \det (A_n, A_2, \ldots, A_n) = 0$$

وبالعكس إذا كان $\det A = 0$ فان الاعمدة مرتبطة خطياً لانها لو كانت مستقلة خطياً لـكان لها مقلوب A^{-1} وبالتـــالي فان $A . A^{-1} = I$ ، ومنه $\det A . \det A^{-1} = 1$ الامر الذي ينتج عنـه أن $\det A \neq 0$ وهـــذا يخالف للفرض .

٣٨ - ٧ **نتيجة** : الشرط اللازم والـكافي كي تكون أسطر مصفوفة A مرتبطة خطياً هو أن يـكون $\det A = 0$ ولبرهان ذلك نستبدل بالمصفوفة A المصفوفة المنقولة A^t في النظرية السابقة فنجد المطلوب .

٣٩ - ٧ في تعيين رتبة مصفوفة :

لتكن $A = [\alpha_j{}^i]$ مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K . تشكل أشعة أعـمدة المصفوفة $A_1, \ldots, A_n$ فراغاً شعاعياً جزئياً S من K^m . كما تشكل أشعة أسطر المصفوفة ، $A^1, \ldots, A^m$ فراغاً شعاعياً جزئيـــاً U من K^n . نسمي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الجزئي S الرتبة العمودية للمصفوفة A ونسمي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي الجزئي U الرتبة السطرية للمصفوفة A .

٤٠ - ٧ نظرية : لتكن $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K . أن الرتبة العمودية والرتبة السطرية لـ A متساويتان وتساويان p رتبة التطبيق الخطي الموافق لـ A . وتكون أكبر مصفوفة مربعة جزئية منتظمة من A من السعة $p \times p$.

(انظر التمارين المحلولة ٢٧٦ ، ٢٧٧ ، ٢٧٨)

استناداً للنظرية السابقة وإلى التعريف [٧-١٧] نجد :

٤١ - ٧ نظرية : الشرط اللازم والكافي لتكون مصفوفة مربعة من السعة $n \times n$ منتظمة هو أن تكون رتبة هذه المصفوفة تساوي n .

مثال : إن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي 2 .

ورتبة المصفوفه $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ تساوي 3 لان معينها غير معدوم وبالتالي فهي منتظمة .

٤٢ - ٧ حل جملة معادلات خطية :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية التالية في المتحولات $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 x_1 + \alpha_2^1 x_2 + \ldots + \alpha_n^1 x_n &= \beta_1 \\ \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \ldots + \alpha_n^2 x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_1^m x_1 + \alpha_2^m x_2 + \ldots + \alpha_n^m x_n &= \beta_m \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

حيث $i = 1, \ldots, n$ ، $j = 1, \ldots, m$ ، α_i^j و $\beta_1, \ldots, \beta_m$ عناصر معلومة من الحقل K

نسمي المصفوفة $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة الامثال لمجموعـة المعادلات (I)

وسنرمز بـ T_A للتطبيق الخطي من K^n الى K^m المرافق للمصفوفة A بالنسبة للقاعدتين الطبيعيتين في K^n و K^m .

إذا رمزنا بـ x و b للشعاعين العمودين $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$ من K^n و K^m على الترتيب لامكن كتابة جملة المعادلات (I) بالمعادلة المصفوفية :

$$\text{(II)} \qquad A x = b \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j x_i = \beta_j \quad , \quad j = 1, \ldots, m \right)$$

وفي الحالة التي يكون فيهـــا الشعاع b هو الشعاع الصفري تصبح الجملة II بالشكل :

$$\text{(III)} \qquad A x = 0$$

ونسمي الجملة في هذه الحالة جملة متجانسة .

وإذا نظرنا في أشعة أعمدة المصفوفة A لتمكنا من كتابة II بالشكل :

$$\text{(IV)} \qquad x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n = b .$$

إذا كان x و x′ حلين لجملة المعادلات I فان :

$$A (x - x') = 0$$

وبعبارة ثانية $T_A (x - x') = 0$. وبالتالي فان الشعاع $x - x'$ ينتمي لنواة التطبيق الخطي T_A .

نستنتج أنه إذا كان x حلاً لجملة المعادلات I فان كل شعاع من الشكل :

$$x + z \quad : \quad z \in \operatorname{Ker} T_A$$

هو أيضاً حل لجملة المعادلات I . ومنه :

٤٣ - ٧ نظرية : الشرط اللازم والكافي كي يكون للجملة I حل وحيد (إن وجد) ، هو أن يكون $\ker T_A = \{0\}$ ، أي أن تكون رتبة مصفوفة الأمثال تساوي n .

ومن جهة ثانية ، إذا كانت رتبة مصفوفة الأمثال ، A ، تساوي p فيوجد p عموداً من أعمدة A مستقلة خطياً . لنفرض أن هذه الاعمدة هي $A_1, \ldots, A_p$. تشكل هذه الاعمدة فراغاً شعاعياً جزئياً U من K^n عدد أبعاده p ويمكن عندئذ كتابة المعادلة IV بالشكل :

$$(V) \qquad x_1 A_1 + \ldots x_p A_p = b - (x_{p+1} A_{p+1} + \ldots + x_n A_n)$$

نستنتج من هذه العلاقة أن الشرط اللازم والكافي ليكون للجملة I حل هو أن يكون الشعاع b منتمياً الى الفراغ الشعاعي الجزئي U ، وذلك لأن الأشعة $A_1, \ldots, A_n$ منتمية لـ U . وعندها مهما كانت $x_{p+1}, \ldots, x_n$ من K فيمكن أن نجد عناصر $x_1, \ldots, x_p$ من K تحقق العلاقة (V) . وبما أنه يمكن اعتبار الأشعة $A_1, \ldots, A_p$ قاعدة في U فان $x_1, \ldots, x_p$ تتعين بشكل وحيد . وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية :

٤٤ - ٧ نظرية : لنفرض أن رتبة المصفوفة A ، مصفوفة أمثال

جملة المعادلات I ، تساوي p . إن الشرط اللازم والكافي ليكون لجملة المعادلات I حل x من أجل قيمة مفروضة لـ b هو أن ينتمي الشعاع العمود b للفراغ الشعاعي الجزئي (ذي الـ p بعداً) من K^n والمتولد من أشعة أعمدة المصفوفة A . وعندها يتعين p مجهولاً $x_1, \ldots, x_p$ بشكل وحيد في حين أن بقية الـ $n - p$ مجهولاً تبقى كيفية .

٤٥ - ٧ **ملاحظة** : (١) نستنتج من العلاقة V أنه إذا كان b الشعاع المعدوم، أي إذا كان لدينا جملة المعادلات المتجانسة III فان $x_1 = \ldots = x_p = 0$ وإلا كانت الأشعة $A_1, \ldots, A_p$ مرتبطة خطياً وهذا يخالف للفرض .

وفي الحالة $p = n$ يكون لجملة المعادلات المتجانسة III حل وحيد هو الصفر

(٢) إذا كان $m = n$ فتكون مصفوفة الامثال A مربعة من السعة $n \times n$. إذا ضربنا المعادلة الاولى بـ A_1^1 والثانية بـ A_1^2 ... والاخيرة بـ A_1^n (المتممات الجبرية) وجمعنا المعادلات الناتجة وجدنا أن :

$$(\det A)\, x_1 = \beta_1 A_1^1 + \beta_2 A_1^2 + \ldots + \beta_n A_1^n$$

إن قيمة الطرف الايمن من العلاقة الاخيرة يمثل قيمة معين مصفوفة تنتج عن المصفوفة A برفع العمود الاول ووضع الشعاع b عوضاً عنه وبالتالي :

$$(\det A)\, x_1 = \det (b\,;\, A_2, \ldots, A_n)$$

فاذا كان $\det A \neq 0$ نجد :

$$x_1 = \frac{\det (b\,,\, A_2, \ldots, A_n)}{\det A}$$

وبوجه عام نجد :

$$x_i = \frac{\det(A_1, .., A_{i-1}, b, A_{i+1}, .., A_n)}{\det A}$$

$i = 1, .., n$

نسمي قاعدة حل جملةالمعادلات الخطية بالدستور الاخير قاعدة كرامر .

تمارين محلولة

٢٤٩ - إذا كانت :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 9 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

فأوجد ما يلي :

$$DB^t \ , \ DB \ , \ CD \ , \ DC \ , \ 3D^t - 2B^t \ , \ D + C \ , \ 2D + B$$

الحل : لدينا حسب التعريف :

$$2D = 2\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

$$2D + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 6 & 10 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 10 & 15 & -6 \end{bmatrix}$$

إن الجمع $D + C$ غير معروف (لماذا ؟) .

حسب تعريف منقول مصفوفة نجد أن :

$$D^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} , \quad B^t = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$3D^t = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 6 & 15 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} , \quad -2B^t = \begin{bmatrix} -12 & -8 \\ -2 & -10 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

نجد أن :

$$3\,D^t - 2\,B^t = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 4 & 5 \\ 14 & -16 \end{bmatrix}$$

ومن أجل الجداء DC نجد :

$$DC = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ -4 & -19 & -10 \end{bmatrix}$$

أما الجداء CD فغير معرف (لماذا ؟) وكذلك الجداء DB غير معرف (لماذا ؟) .

من أجل الجداء DB^t نجد :

$$D\,B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 51 & 29 \end{bmatrix}$$

٢٥٠ - إذا كانت لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ فأوجد المصفوفة $I - 2A^2 + A - I$ حيث I مصفوفة الواحدة من المرتبة الثالثة .

الحل : لدينـــا :

$$A^2 = A\,A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$-2A^2+A-I=\begin{bmatrix}-12 & -8 & -10\\ -8 & -6 & -8\\ -10 & -8 & -12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -7 & -8\\ -7 & -4 & -7\\ -8 & -7 & -10\end{bmatrix}$$

٢٥١ - ليكن V فراغاً شعاعياً على الحقل R عـدد أبعاده 2 . ولتكن (e_1, e_2) قاعـــدة في V . ليكن $T, F : V \to U$ تطبيقين خطيين معطيين بالعلاقات :

$$T(e_1)=2e_1-e_2 \quad , \quad T(e_2)=3e_1+2e_2$$

$$F(e_1)=5e_1+e_2 \quad , \quad F(e_2)=e_1+e_2$$

(١) أوجد المصفوفة المرافقة لكل من T و F و FoT و ToF .

(٢) أوجـــد خيال الشعاع $u = 3e_1 - 4e_2$ وفق كل من التطبيقات T و F و FoT .

الحل : (١) إذا كان $A=[a_j^i]$ المصفوفة المرافقـة للتطبيق الخطي T بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) فيجب أن يكون :

$$T(e_j)=\sum_{i=1}^{2} a_j^i e_i \quad , \quad j=1, 2$$

$$= a_j^1 e_1 + a_j^2 e_2$$

وبالتالي نجد أن :

$$A=[a_j^i]=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

وإذا كانت $B = [b_j^i]$ المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي F بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) فيجب أن يكون :

$$F(e_j) = \sum_{i=1}^{2} b_j^i e_i \qquad , \qquad j = 1, 2$$

ومنه نجد أن :

$$B = [b_j^i] = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وكما نعلم إن المصفوفة المرافقة للتطبيق المركب F o T بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) هي مصفوفة الجداء BA أي :

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

كما أن المصفوفة المرافقة لتطبيق المركب T o F بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) هي مصفوفة الجداء AB أي :

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

هــذا ويمكن الحصول على المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي F o T بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2) بالرجوع الى التطبيق المركب F o T فنجد :

$$(F \circ T)(e_1) = F(T(e_1)) = F(2e_1 - e_2)$$

$$= 2F(e_1) - F(e_2) \qquad \text{(F تطبيق خطي)}$$

$$= 2\,(5\,e_1 + e_2) - (e_1 + e_2)$$

$$= 9\,e_1 + e_2$$

ونجد أيضاً :

$$o\ T)\,(e_2) = 17\,e_1 + 5\,e_2$$

ونحصل على المصفوفة الموافقة BA .

وبصورة مشابهة يمكن أن نحصل على المصفوفة AB الموافقة لـ T o F

(٢) يمكن أن نمثل الشعاع u بشعاع عمود $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ ونحصل على خيال u وفق T بالجداء المصفوفي :

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$T\,(u) = -6\,e_1 - 11\,e_2$$

وكان بالامكان الحصول على خيال u بتطبيق T مباشرة فنجد :

$$T\,(u) = T\,(3\,e_1 - 4\,e_2)$$

$$= 3\,T\,(e_1) - 4\,T\,(e_2)$$ (T تطبيق خطي)

$$= 3\,(2\,e_1 - e_2) - 4\,(3\,e_1 + 2\,e_2) = -6\,e_1 - 11\,e_2$$

هذا وإن خيال u وفق F يعطى بالشعاع العمود :

$$B \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وخيال u وفق F o T هو الشعاع العمود :

$$BA\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 17\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-41\\-17\end{bmatrix}$$

وخيال u وفق T o F هو الشعاع العمود :

$$AB\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 5\\-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\-13\end{bmatrix}$$

ويمكن الحصول على خيال u بتطبيق مباشر للتطبيقات السابقة على u .

٢٥١ ـ اعط تفسيراً هندسياً للتحويل المعروف في المستوي x o y بالعلاقة $y = Ax$ (حيث $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ ، $y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ يمثلان نقطتين أو شعاعين مبدؤهما o) وذلك من أجل :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

الحل :

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\-x_2\end{bmatrix}$$

وهذا يمثل تناظراً بالنسبة للمحور ox . أما

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

فيمثل التطبيق المطابق .

ويمثل :

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

تناظراً بالنسبة لمبدأ الاحداثيات . كما يمثل :

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

تركيب تناظرين : الاول بالنسبة لمنصف الربع الاول يعقبه تناظر بالنسبة للمحور oy . وأخيراً فإن :

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

يمثل تناظراً بالنسبة للمحور oy .

٢٥٢ - لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ على الحقل C ، حقل الاعداد المركبة حيث $i^2 = -1$. أوجد كلاً من المصفوفات التالية :

$$A A^t \quad ، \quad A^2 \quad ، \quad i A$$

الحل : حسب تعريف ضرب عنصر من الحقل بمصفوفة نجد :

$$i A = i \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2i \\ -1+i & 3i & -1 \\ 2i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4-6i & 3+i \\ 4+6i & 12 & 2+5i \\ 3-i & 2-5i & 5 \end{bmatrix}$$

أن :

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5-2i & 4 & 1-i \\ 4 & 8+2i & 2-i \\ 1-i & 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

٢٥٣ - لتكن A و B مصفوفتين من السعة $n \times n$ على الحقل K برهن أن جداء A بـ B تبديلي إذا كان جداء المصفوفتين $A - \lambda I$ و $B - \lambda I$ تبديلياً من أجل كل عنصر λ من K وفي هذه الحالة فقط .

الحل : إذا كان $AB = BA$ فان :

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) = AB - \lambda (A + B) + \lambda^2 I$$

$$= BA - \lambda (B + A) + \lambda^2 I$$

(جمع المصفوفات تبديلي)

$$= (B - \lambda I)(A - \lambda I)$$

وبالعكس إذا كان من أجل كل λ من K :

$$(A - \lambda I)(B - \lambda I) = (B - \lambda I)(A - \lambda I)$$

فان :

$$AB - \lambda (A + B) + \lambda^2 I = BA - \lambda (B + A) + \lambda^2 I$$

ومنه نجد أن : $AB = BA$ وهو المطلوب .

٢٥٤ - لتكن A و B مصفوفتين من السعة $n \times n$. إذا كان $AB = BA$ فان $A^{-1} B^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ وأن $A^t B^t = B^t A^t$ أيضا .

الحل : بأخذ معكوس طرفي العلاقة $AB = BA$ نجد :

$$(AB)^{-1} = (BA)^{-1}$$

لكن $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ (لماذا ؟)، وبالتالي تصبح العلاقة الاخيرة من الشكل :

$$B^{-1} A^{-1} = A^{-1} B^{-1}$$

وبأخذ منقول طرفي العلاقة $AB = BA$ نجد أن :

$$(AB)^t = (BA)^t$$

وحسب خواص منقول مصفوفة يمكن أن نكتب العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$A^t B^t = B^t A^t$$

وهو المطلوب .

٢٥٥ - أوجد المصفوفات الموافقة للتطبيقات الخطية التالية :

(١) $T : R^3 \to R^2$ ومعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

(٢) $F : R^4 \to R^2$ ومعطى بالعلاقة :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_3 - 2x_4)$$

(٣) $G : R^2 \to R^3$ ومعطى بالعلاقة :

$$G(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

حيث $(x_1, \ldots, x_p)$ تمثل مركبات شعاع كيفي من R^p بالنسبة للقاعدة القانونية .

الحل : (١) إذا رمزنا بـ (y_1, y_2) لخيال (x_1, x_2, x_3) من R^3 وفق T أي :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$$

فنجد أن :

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

وتكون المصفوفة المرافقة لـ T هي المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(٢) إذا كتبنا : $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2)$

فنجد أن :

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3 - 2x_4$$

والمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي F هي المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(٣) إذا كتبنا :

$$G(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$$

فنجد أن :

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

$$y_3 = 2x_1 + 3x_2$$

وأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي G هي المصفوفة :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

٢٥٦ - ليكن التطبيقان الخطيان $T : R^3 \to R^2$ و $F : R^2 \to R^3$ المعرفين بالشكل :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

حيث $(x_1, \ldots, x_p)$ تمثل مركبات شعاع كيفي من R^p بالنسبة للقاعدة القانونية .

أوجد المصفوفات الموافقة ونواة كل من التطبيقات الخطية F, T و $F \circ T$ و $T \circ F$ واستنتج رتبة كل من هذه المصفوفات الموافقة .

الحل : إذا كتبنا $(y_1, y_2) \in R^2$ حيث يكون :

$T(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$ فإن :

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_2 - x_3$$

ومنه المصفوفة الموافقة لـ T هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إن نواة التطبيق الخطي T :

$$\text{Ker } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \ : \ T(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$$

وبالتالي فإن :

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

ومنه نجد أن $x_1 = x_2 = x_3$ أي :

$$\text{Ker } T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \ : \ x_1 = x_2 = x_3 \}$$

Ker T تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^3 عدد أبعاده واحد .

إذن رتبة التطبيق الخطي T والمصفوفة A ، الموافقة لـ T ، تساوي 2 (عدد أبعاد R^3 مطروحاً منه عدد أبعاد Ker T) .

من أجل التطبيق F ، إذا كتبنا $F(x_1 , x_2) = (y_1 , y_2 , y_3)$ فنجد أن :

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_1 + x_2$$
$$y_3 = x_1 - x_2$$

وأن المصفوفة الموافقة لـ F هي المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إن نواة التطبيق الخطي F :

$$\text{Ker } F = \{ (x_1 , x_2) \in R^2 \ : \ F(x_1 , x_2) = 0 \}$$

إذن :

$$x_1 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

ومنه نجد أن $x_1 = x_2 = 0$ أي أن $\text{Ker } F = \{0\}$ وعدد أبعاده صفر .
وتكون رتبة F والمصفوفة الموافقة B تساوي 2 عدد أبعاد R^2 .

إن المصفوفة الموافقة للتطبيق الخطي المركب F o T هي جداء

للصفوفتين B . A أي المصفوفة :

$$B\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون التطبيق الخطي $F \circ T : R^3 \to R^3$ معطى بالعلاقة (لماذا ؟) :

$$(F \circ T)(x_1 , x_2 , x_3) = (x_1 - x_2 , x_1 - x_3 , x_1 - 2 x_2 + x_3)$$

ونجد بسهولة أن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker}\,(F \circ T) = \{ 0 \}$$

أي أن رتبة $F \circ T$ والمصفوفة BA تساوي 3 عدد أبعاد R^3 .

وبطريقة مشابهة نجد أن المصفوفة المرافقة لـ $T \circ F$ هي المصفوفة :

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ويكون التطبيق الخطي $T \circ F : R^2 \to R^2$ معطى بالعلاقة :

$$(T \circ F)(x_1 , x_2) = (-x_2 , 2 x_2)$$

ونجد أن نواة هذا التطبيق :

$$\text{Ker}\,(T \circ F) = \{ (x_1 , x_2) \in R^2 \; : \; (T \circ F)(x_1 , x_2) = 0 \}$$

$$= \{ (x_1 , 0) \; : \; (x_1 , 0) \in R^2 \}$$

وهي تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً من R^2 عدد أبعاده واحد .

وتكون رتبة $T \circ F$ والمصفوفة AB هي الواحد .

ملاحظة : يمكن الحصول على رتب المصفوفات السابقة بالاستفادة من المعينات (معين المصفوفة المنتظمة يخالف الصفر) والنظرية [٤٠-٧] .

٢٥٧ - لدينا التطبيق f الذي يقابل كل مصفوفة من السعة 2×2 معرفة على حقل F بعنصر من هذا الحقل وفق ما يلي :

$$f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_2^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \qquad \alpha_i^j \in F$$

فهل هـــذا التطبيق متعدد الخطية بالنسبة لأعمـدة المصفوفة ؟ وهل هو متناوب ؟

الحل : إن

$$f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 + \beta_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = (\alpha_1^1 + \beta_1^1)\, \alpha_2^1 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\, \alpha_2^2$$

$$= (\alpha_1^1 \alpha_2^1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2) + (\beta_1^1 \alpha_2^1 - \beta_1^2 \alpha_2^2)$$

$$= f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \alpha_2^1 \\ \beta_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

كذلك $\forall \lambda \in F$ فإن :

$$f \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \lambda \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \lambda\, \alpha_1^1 \alpha_2^1 - \lambda\, \alpha_1^2 \alpha_2^2 = \lambda f \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

فالتطبيق خطي بالنسبة للعمود الأول .

بطريقة مماثلة نبرهن أن التطبيق خطي بالنسبة للعمود الثـــاني فهو متعدد الخطية بالنسبة لاعمـــدة المصفوفة . ولكن نلاحظ أن التطبيق ليس متناوباً لأن :

$$f\begin{bmatrix} \alpha_2^1 & \alpha_1^1 \\ \alpha_2^2 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} = \alpha_2^1\,\alpha_1^1 - \alpha_2^2\,\alpha_1^2 = \alpha_1^1\,\alpha_2^1 - \alpha_1^2\,\alpha_2^2 =$$

$$= f\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

ولـكي يكون متناوباً يجب أن يغير إشارته عندما نبادل بين عموديه .

٢٥٨ - احسب :

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل : انشر المعين وفق عناصر السطر الأول فنجد أنه يساوي :

$$(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+4}(4)\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -4 + 2 + 64 = 62$$

٢٥٩ - إذا كانت A مصفوفة مثلثية من الأسفل (راجع(٤) [١-٧])

فبرهن أن :

$$\det A = \alpha_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n$$

الحل : لتكن المصفوفة المثلثية هي :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ 0 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 & \ldots & \alpha_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

وحسب الدستور 2 في [٢٤-٧] نكتب :

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \, \alpha_1^{\sigma(1)} \ldots \alpha_n^{\sigma(n)}$$

المجموع مأخوذ من أجل جميع متبادلات $\{1, 2, \ldots, n\}$.

بما أن $\alpha_i^{\sigma(i)} = 0$ إذا كان $\sigma(i) > i$ حيث $i = 1, \ldots, n$ فإن $\varepsilon_\sigma = +1$ ونحصل على :

$$\det A = \alpha_1^1 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^n$$

وهو المطلوب .

٢٦٠ ـ إذا كانت المصفوفة A سعتها $n \times n$ وذات تناظر مائل وإذا كان $1 + 1 \neq 0$ في حقل الأعـــداد F فبرهن أن $\det A = 0$ إذا كان n فردياً .

(نقول عن مصفوفـــة مربعة إنها ذات تناظر مائل عندمـــا : $(\alpha_j^i = -\alpha_i^j \; (i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

الحل : استناداً الى تعريف المعين نلاحظ :

$$\det - A = \det(-A_1, -A_2, \ldots, -A_n) =$$

$$= (-1)^n \det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = (-1)^n \det A$$

وبما أن تغيير إشارة جميع عناصر المصفوفة ذات التناظر المائل يعطي مصفوفة جديدة هي منقول المصفوفة الأصلية ، وبما أن قيمة معين المصفوفة يساوي قيمة معين المصفوفة المنقولة فان :

$$\det A = \det A^t = \det - A$$

حيث A^t منقول A .

وهكذا نجد :

$$\det A = (-1)^n \det A$$

فإذا كان n فردياً ، عندئذ يكون $(-1)^n = -1$ وبالتالي .

$$(1 + 1) \det A = 0$$

ولما كان $1 + 1 \neq 0$ فان :

$$\det A = 0$$

وهو المطلوب .

٢٦١ - برهن أنه إذا كان F هو حقل الأعداد الحقيقية فإن :

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 2 & -10 \\ -3 & -8 & 0 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 4 & 0 & -11 \\ -6 & 10 & -1 & 11 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

الحل : من المعلوم أن $i+i \neq 0$ في حقل الأعداد الحقيقية . وبإمعان النظر في المصفوفة نرى أنها ذات تناظر مائل . وبما أن $n = 5$ عـــدد فردي نستنتج استناداً الى التمرين السابق أن قيمة المعين تساوي الصفر وهو المطلوب .

٢٦٢ - لتكن A مصفوفة من السعة $n \times n$ ولتكن C مصفوفة منتظمة سعتها $n \times n$ كذلك ، وليكن $A' = C A C^{-1}$. برهن أن $\det A' = \det A$.

الحل : استناداً الى نظرية ضرب المعينات نجد :

$$\det A' = \det C A C^{-1} = \det C \det A C^{-1}$$

$$= \det C \det A \det C^{-1}$$

وبما أن قيم المعينات عناصر من الحقل F وهذه تخضع للخاصة التبديلية يكون :

$$\det A' = \det C \det C^{-1} \det A$$

$$= \det C C^{-1} \det A = \det I \det A$$

ولكن $\det I = 1$ إذن :

$$\det A' = \det A$$

***٢٦٣** - برهن أن معين فان درموند Van dermonde :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

يساوي $\prod_{i>k}(x_i - x_k)$ أي : $\ldots\ (x_3 - x_2)\ (x_3 - x_1)\ (x_2 - x_1)$،

الحل : يمكن أن ننجز البرهان بطريقة التراجع : أولاً لنفرض أن $n = 2$ فيكون :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

وهذا ينسجم مع الجواب المعطى . لنفرض الان أن المطابقة المذكورة صحيحة من أجل جميع الاعداد الصحيحة الموجبة التي هي أقل من n ، ولنبرهن صحتها من أجل n

لنطرح من العمود n العمود $n - 1$ بعد ضربه بـ x_1 ولنطرح من العمود $n - 1$ العمود $n - 2$ بعد ضربه بـ x_1 وهكذا ، فنجد :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

لننشر وفق عناصر السطر الاول فنجد :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

إن المضروب $(x_2 - x_1)$ مشـــترك بين جميع عناصر السطر الاول و $(x_3 - x_1)$ مشترك بين جميع عناصر السطر الثاني وهكذا . لذلك :

$$\Delta_n = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ولكن بما أن المتطابقة صحيحة من أجل $n - 1$ يكون المعين الاخير مساوياً $\prod_{i > k > 2} (x_i - x_k)$.

أي :

$$(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \dots$$

وهكذا نجد أن :

$$\Delta_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \dots = \prod_{i > k} (x_i - x_k)$$

وهو المطلوب .

٢٦٤ - إذا كان :

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 1 \quad 0 \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & \alpha_n \end{vmatrix}$$

فبرهن أن :

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} + D_{n-2}$$

الحل : لننشر وفق عناصر السطر الاخير فنجد :

$$D_n = (-1)^{n+n-1}(-1)\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 0 \dots & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{n+n}\alpha_n \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots & & & -1 & \alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

ولكن المعين الاخير يساوي D_{n-1} ، أما المعين الاول فننشره وفق عناصر العمود الاخير الذي جميع عناصره أصفار باستثناء العنصر الاخير الذي يساوي 1 فنجد :

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_2 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & \alpha_{n-2} \end{vmatrix}$$

وما المعين الاخير إلا D_{n-2} لذلك :

$$D_n = \alpha_n D_{n-1} + D_{n-2}$$

وهو المطلوب .

٢٦٥ - احسب معين المصفوفة A التالية :

$$\begin{bmatrix} t-1 & 1 & 4 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 3 & 2 & t-3 \end{bmatrix}$$

ثم احسب معين المصفوفة $\bar{A}$ (المصفوفة المنقولة لمصفوفة المتممات الجبرية) وتحقق من صحة المساواة :

$$A \cdot \bar{A} = (\det A)\, I$$

الحل : لحساب معين المصفوفة ننشر وفق عناصر العمود الاول فنجد :

$$\det A = (t-1)\left[\,(t-2)(t-3)+2\,\right] + 3\left[\,-1-4\,(t-2)\,\right]$$
$$= t^3 - 6\,t^2 + t + 13$$

لنحسب بعد ذلك المتممات الجبرية لعناصر المصفوفة A :

$$A_1^1 = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} t-2 & -1 \\ 2 & t-3 \end{bmatrix} = t^2 - 5\,t + 8$$

بطريقة مماثلة نجـــد :

$$A_2^1 = -3 \;,\quad A_3^1 = -3\,(t-2) \;,\quad A_1^2 = 11 - t \;,\quad A_2^2 = t^2 - 4\,t - 9$$
$$A_3^2 = 5 - 2\,t \;,\quad A_1^3 = 7 - 4\,t \;,\quad A_2^3 = t - 1 \;,\quad A_3^3 = t^2 - 3\,t + 2$$

ويكون :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} t^2 - 5\,t + 8 & 11 - t & 7 - 4\,t \\ -3 & t^2 - 4\,t - 9 & t - 1 \\ -3\,(t-2) & 5 - 2\,t & t^2 - 3\,t + 2 \end{bmatrix}$$

وبالتـــالي :

$$\det \bar{A} = (t^2 - 5t + 8)\,[\,(t^2 - 4t - 9)(t^2 - 3t + 2)$$
$$- (t - 1)(5 - 2t)\,] - (11 - t)\,[\,-3(t^2 - 3t + 2) +$$
$$+ 3(t - 1)(t - 2)\,] + (7 - 4t)\,[\,-3(5 - 2t) +$$
$$+ 3(t - 2)(t^2 - 4t - 9)\,]$$

وحسب قواعد ضرب المصفوفات نجد :

$$A \,.\, A = (t^3 - 6t^2 + t + 13)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\det A)\, I$$

وهو المطلوب .

٢٦٦ - احسب A^{-1} إذا علمت أن :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل : بسهولة نجد أن :

$$\det A = -46$$

وأن :

$$A_1^{\,1} = -18 \;,\; A_1^{\,2} = -11 \;,\; A_1^{\,3} = -10 \;,\; A_2^{\,1} = 2 \;,\; A_2 = 14$$
$$A_2^{\,3} = -4 \;,\; A_3^{\,1} = 4 \;,\; A_3^{\,2} = 5 \;,\; A_3^{\,3} = -8$$

وعلى هذا يكون :

$$A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

ومنه :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

٢٦٧ - حل جملة المعادلات التالية وفق قاعدة كرامر :

$$x + 2y = 4$$

$$x - 4y + z = 1$$

$$2x + y - 3z = 0$$

الحل :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{50}{21}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{21} = \frac{17}{21}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{21} = \frac{39}{21} = \frac{13}{7}$$

٢٦٨ - لتكن (e^{-t}, e^{2t}) , $(e^t, t\,e^t)$ قاعدتين في فراغ شعاعي جزئي V من فراغ مجموعة التطبيقات من R الى R . ليكن $D: V \to V$ التطبيق الخطي المعرف بعملية الاشتقاق (المؤثر التفاضلي) ، أوجـد المصفوفتين المرافقتين لـ D بالنسبة للقاعدتين المفروضتين .

الحل : لدينـــا :

$$D(e^{-t}) = -e^{-t}$$

$$D(e^{2t}) = 2\,e^{2t}$$

فالمصفوفة المرافقة لـ D بالنسبة للقاعدة الاولى هي :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ولدينا أيضاً :

$$D(e^t) = e^t$$

$$D(t\,e^t) = e^t + t\,e^t$$

فالمصفوفة المرافقة لـ D بالنسبة للقاعدة الثانية هي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٢٦٩ - لتكن $(1, t, t^2)$ قاعدة في فراغ كثيرات الحدود الحقيقية ذات الدرجة الثانية على الاكثر P_2 . برهن أن الاشعة $t - t^2, 5t, 1 + t$ من P_2 تشكل قاعدة . أوجد مصفوفة الانتقال من القاعدة الاولى الى القاعدة الثانية وبالعكس . أوجد خيال الشعاع $f(t) = 3t^2 - 2t + 4$ وفق التطبيق الخطي المرافق لمصفوفة الانتقال من القاعدة الاولى الى الثانية .

الحل : لنبرهن أن الاشعة $t - t^2, 5t, 1 + t$ مستقلة خطياً . إن شرط الاستقلال الخطي هو :

$$\alpha (1 + t) + \beta (5 t) + \gamma (t - t^2) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

حيث $\alpha , \beta , \gamma \in R$.

نجد من العلاقات السابقة أن :

$$\alpha + (\alpha + 5\beta + \gamma) t - \gamma t^2 = 0$$

وبما أن $(1, t, t^2)$ مستقلة خطياً فان العلاقة السابقة تؤدي الى أن :

$$\alpha = 0 \quad , \quad \alpha + 5\beta + \gamma = 0 \quad , \quad \gamma = 0$$

ومنه نجد أن $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ، أي أن الاشعة $t - t^2, 5t, 1 + t$ مستقلة خطياً وبما أن عددها يساوي عدد أبعاد الفراغ P_2 فهي تشكل قاعدة فيه .

إذا رمزنا بـ u_1 , u_2 , u_3 لأشعة القاعدة الثانية على التوالي أي :

$$u_1 = 1 + t$$
$$u_2 = 5\,t \qquad (1)$$
$$u_3 = t - t^2$$

لوجدنا أن مصفوفة الانتقال من القاعدة $(1 , t , t^2)$ الى القاعدة (u_1 , u_2 , u_3) هي المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

إن التطبيق الخطي $T : P_2 \to P_2$ الموافق للمصفوفة A بالنسبة للقاعدة $(1 , t , t^2)$ يعطى بالعلاقات :

$$T(1) = 1 + t$$
$$T(t) = 5\,t$$
$$T(t^2) = t - t^2$$

إذا كتبنا مركبات الشعاع $f(t)$ بالنسبة للقاعدة $(1 , t , t^2)$ وفق العمود $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ فان مركبات خيال هذا الشعاع وفق T هو العمود الناتج من الجداء المصفوفي :

$$A \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$T(f(t)) = 2 - 10t - 5t^2$$

(يمكن الحصول على هـــذه النتيجة بتطبيق T مباشرة واستخدام المعادلات المعرفة لـ T) .

إن مصفوفة الانتقال من القاعدة الثانية إلى القاعدة الأولى هي المصفوفة المعاكسة للمصفوفة A ويمكن أن نحصل عليها بطريقة مباشرة هي أن نكتب أشعة القاعدة $(1, t, t^2)$ بدلالة أشعة القاعدة (u_1, u_2, u_3) فنجد من المعادلات (١) :

$$1 = u_1 - \frac{1}{5} u_2$$

$$t = \frac{1}{5} u_2$$

$$t^2 = \frac{1}{5} u_2 - u_3$$

وبالتالي فإن A^{-1} هي المصفوفة :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}$$

٢٧٠ - احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ الواردة في التمرين السابق وذلك باستخدام المعينات .

الحل : لما كان Δ معين المصفوفة A مغايراً الصفر لأن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

فإن المصفوفة A منتظمة ولها معكوس .

إذا رمزنا بـ $\Delta_j{}^i$ للمعين الناتج عن Δ بحـــذف السطر ذي الرقم i والعمود ذي الرقم j فنجد أن :

$$\Delta_1{}^1 = -5 \quad , \quad \Delta_2{}^1 = 0 \quad , \quad \Delta_3{}^1 = 0$$

$$\Delta_1{}^2 = -1 \quad , \quad \Delta_2{}^2 = -1 \quad , \quad \Delta_3{}^2 = 1$$

$$\Delta_1{}^3 = 0 \quad , \quad \Delta^3{}_2 = 0 \quad , \quad \Delta_3{}^3 = 5$$

وإذا كتبنا أن $A^{-1} = [\beta_j{}^i]$ فان : $\beta_j{}^i = \frac{1}{\Delta}(-1)^{i+j}\Delta_i{}^j$ وبالتالي :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 \end{bmatrix}$$

٢٧١ - لتكن (e_1 , e_2 , e_3) القاعدة القانونية في R^3 . لنأخذ الاشعة $u_1 = (1 , 1 , 0)$ و $u_2 = (-1 , 1 , 1)$ و $u_3 = (0 , 1 , 2)$ والأشعة $v_1 = (-1 , 1 , 1)$ و $v_2 = (0 , 0 , 1)$ و $v_3 = (2 , 1 , 1)$ المنسوبة إلى القاعدة القانونية .

(١) برهن أن كلا من (v_1 , v_2 , v_3) و (u_1 , u_2 , u_3) تشكل قاعدة في R^3 .

(٢) أوجد مصفوفة الانتقال من القاعدة (u_1 , u_2 , u_3) الى القاعدة (v_1 , v_2 , v_3) .

الحل :

(١) نتركه للقارىء لسهولته .

(٢) إذا كتبنا الأشعة :

$$v_1 = - e_1 + e_2 + e_3$$

$$v_2 = e_3$$

$$v_3 = 2 e_1 + e_2 + e_3$$

فإننا نجد أن مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية الى القاعـــدة (v_1 , v_2 , v_3) هي :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونيـــة إلى القاعدة (u_1, u_2, u_3) هي المصفوفة :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الانتقال من القاعدة (u_1, u_2, u_3) الى القاعدة القانونية هي المصفوفة المعاكسة B^{-1} . لنحسب B^{-1} : إن معين هذه المصفوفة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

والمعينات الجزئية :

$$\Delta_1^1 = 1 \quad , \quad \Delta_2^1 = -2 \quad , \quad \Delta_3^1 = -1$$

$$\Delta_1^2 = 2 \quad , \quad \Delta_2^2 = 2 \quad , \quad \Delta_3^2 = 1$$

$$\Delta_1^3 = 1 \quad , \quad \Delta_2^3 = 1 \quad , \quad \Delta_3^3 = 2$$

ومنه نجد أن :

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة الانتقال من القاعـــدة (u_1, u_2, u_3) الى القاعـــدة

(v_1, v_2, v_3) هي مصفوفة الجداء :

$$AB^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة ترافق التطبيق الخطي $T : R^3 \to R^3$ المعرف بالعلاقات $T(u_i) = v_i \; , \; i = 1 , 2 , 3$ بالنسبة القاعدة (u_1, u_2, u_3) .

٢٧٢ - ليكن T مؤثراً خطياً على R^3 معرفاً بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3 \, , \, -2x_1 + x_2 \, , \, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

حيث (x_1, x_2, x_3) مركبات شعاع كيفي بالنسبة للقاعدة القانونية (e_1, e_2, e_3) من R^3 .

(١) اكتب المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (e_1, e_2, e_3) .

(٢) اكتب المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2, u_3) والتي أشعتها معطاة بالنسبة للقاعدة القانونية من الشكل :

$$u_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad u_2 = (-1, 2, 1) \quad , \quad u_3 = (2, 1, 1)$$

(٣) برهن أن T تطبيق منتظم . ثم أوجد التطبيق المعاكس T^{-1} .

الحل : (١) إن المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية هي :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(٢) إن خيال أشعة القاعدة (u_1, u_2, u_3) وفق T هو :

$$T(u_1) = 4e_1 - 2e_2 + 3e_3$$

$$T(u_2) = -2e_1 + 4e_2 + 9e_3$$

$$T(u_3) = 7e_1 - 3e_2 + 4e_3$$

يتضح مما سبق أن المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدتين : (u_1, u_2, u_3) و (e_1, e_2, e_3) على الترتيب هي :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

ومن ناحية ثانية لدينا :

$$u_1 = e_1 + e_3$$

$$u_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3$$

$$u_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$$

أي أن مصفوفة الانتقال من القاعدة (e_1, e_2, e_3) الى القاعدة (u_1, u_2, u_3) هي :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة المعاكسة C^{-1} تمثل مصفوفة الانتقال من القاعدة (u_1, u_2, u_3) الى القاعدة (e_1, e_2, e_3) وتمكننا من كتابة أشعة القاعدة (e_1, e_2, e_3) بدلالة أشعة القاعدة (u_1, u_2, u_3) ومنه نجد :

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{3} (B \cdot C^{-1})_i^{\ j}\, u_j \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

أي أن المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_3 , u_2 , u_1) هي المصفوفة BC^{-1} وبالتالي يكفي أن نحسب C^{-1} .

حساب C^{-1} : إن معين المصفوفة C هو :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

وتكون المعينات الثنائية الجزئية من C :

$$\Delta_1^1 = 1 \quad , \quad \Delta_2^1 = -1 \quad , \quad \Delta_3^1 = -2$$

$$\Delta_1^2 = -3 \quad , \quad \Delta_2^2 = -1 \quad , \quad \Delta_3^2 = 2$$

$$\Delta_1^3 = -5 \quad , \quad \Delta_2^3 = 1 \quad , \quad \Delta_3^3 = 2$$

إذا كتبنا $C^{-1} = [\alpha_j^i]$ فإن $\alpha_j^i = \frac{1}{\Delta} (-1)^{i+j} \Delta_i^j$ ومنه نجد أن :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1 , u_2 , u_3) هي المصفوفة :

$$B\,C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(٣) لاثبات أن T تطبيق منتظم يكفي أن نثبت أن المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة ولتكن القاعدة (e_1 , e_3 , e_3) ، منتظمة ويتم هذا باثبات أن معين المصفوفة A يخالف الصفر . إن :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

وبالتالي فالشرط محقق .

لتعيين التطبيق T^{-1} يكفي أن نعرف المصفوفة A^{-1} ، المصفوفة الموافقة لـ T^{-1} بالنسبة للقاعدة (e_1 , e_2 , e_3) . من أجل ذلك نحسب المعينات الجزئية من A :

$$\Delta_1^1 = 4 \quad , \quad \Delta_2^1 = -8 \quad , \quad \Delta_3^1 = -3$$

$$\Delta_1^2 = -2 \quad , \quad \Delta_2^2 = 13 \quad , \quad \Delta_3^2 = 6$$

$$\Delta_1^3 = -1 \quad , \quad \Delta_2^3 = 2 \quad , \quad \Delta_3^3 = 3$$

ونجد أن :

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون :

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{9}(4x_1 + 2x_2 - x_3),\ \frac{1}{9}(8x_1 + 13x_2 - 2x_3),\ \frac{1}{9}(-3x_1 - 6x_2 + 3x_3)\right)$$

٢٧٣ - ليكن V فراغاً شعاعيا على الحقل K عدد أبعاده n .
لتكن $\{ v_i \}$ قاعدة في V . إذا كانت $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة منتظمة في K فبرهن أن جملة الأشعة :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j v_j \qquad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

تشكل قاعدة في V .

الحل : بما أن عدد جملة الأشعة $(u_1, \ldots, u_n)$ يساوي عدد أبعاد الفراغ الشعاعي V فيكفي أن نبرهن أنها مستقلة خطياً . إن شرط الاستقلال الخطي هو :

$$\sum^{n} \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

حيث $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ عناصر من الحقل **K** .
يكتب الطرف الأيسر بالشكل :

$$\sum_i \lambda_i u_i = \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j v_j = 0$$

نستنتج من هـــذه العلاقة ومن كون الاشعة $v_1, \ldots, v_n$ مستقلة خطياً أن :

$$\sum_i \lambda_i \alpha_i^j = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

إن المصفوفة $A = [\alpha_i^j]$ منتظمة وبالتالي يوجد مصفوفة معاكسة $A^{-1} = [\beta_i^j]$ حيث $AA^{-1} = I$ أي : $\sum_j \alpha_i^j \beta_j^k = \delta_i^k$ (حيث $\delta_i^k = 1$ من أجل $i = k$ وتساوي صفراً فيما عدا ذلك) . ومن العلاقات (١) نجد :

$$\sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j \beta_j^k = \sum_i \lambda_i \sum_j \alpha_i^j \beta_j^k = 0$$

أي $\lambda_k = 0 \, , \, k = 1, \ldots, n$ وهو المطلوب .

٢٧٤ - ليكن V و W، راغـين شعاعيين على الحقل K ، عـدد أبعادهما n و m على الترتيب . إذا كان $T : V \to W$ تطبيقاً خطيـــاً رتبته تساوي p فيوجد قاعدة $\{v_i\}$ في V وقاعدة $\{w_j\}$ في W بحيث تكون المصفوفة A المرافقة لـ T بالنسبة لهاتين القاعدتين من الشكل :

$$A = (\alpha_i^j) \quad : \quad \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_p^p = 1$$

وبقية عناصر A تـاوي الصفر .

وبالعكس إذا كانت المصفوفة A من الشكل المذكور فان رتبـــة التطبيق الخطي T تساوي p .

الحل : إن عدد أبعاد $\operatorname{Ker} T$ ، نواة التطبيق الخطي T يسـاوي

$n-p$ وذلك استناداً للنظرية [١٢ - ٦] . انفرض أن $v_{p+1}, \ldots, v_n$ تشكل قاعدة في $\operatorname{Ker} T$. تحقق هذه الاشعة العلاقات :

$$(1) \qquad T(v_a) = 0 \quad , \quad a = p+1, \ldots, n$$

يمكن أن نضيف للأشعة السابقة p شعاعاً جديداً $v_1, \ldots, v_p$ بحيث تصبح جملة الأشعة $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$ قاعدة في V .

إن جملة الاشعة :

$$(2) \qquad w_i = T(v_i) \quad , \quad i = 1, \ldots, p$$

تشكل قاعدة في $T(V)$ وذلك لانها مستقلة خطياً (لماذا ؟) وعددها يساوي عدد أبعاد $T(V)$. يمكن أن نضيف $m-p$ شعاعاً جديداً $w_{p+1}, \ldots, w_m$ بحيث تشكل جملة الاشعة $w_1, \ldots, w_m$ قاعدة في W .

إذا رمزنا بـ $A = [\alpha_i^j]$ المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدتين المنشأتين في V و W فنجد من العلاقتين (1) و (2) أن :

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_p^p = 1$$

وبقية عناصر A تساوي الصفر .

العكس : إذا كانت المصفوفة A تحقق الشروط السابقة فإن عدد أبعاد $T(V)$ وبالتالي رتبة T تساوي p وهو المطلوب .

٢٧٥ - لتكن $A = [\alpha_i^j]$ مصفوفة على الحقل K من السعة $m \times n$. إذا كانت رتبة A تساوي p فإن مجموعة الاشعة x من K^n حيث $Ax = 0$ تشكل فراغاً شعاعياً جزئياً عدد أبعاده $n-p$.

(Ax جداء مصفوفي حيث x يمثل شعاع عمود مؤلف من مركبات الشعاع x بالنسبة لقاعدة قانونية في K^n) .

الحل : إذا رمزنا بـ $T : K^n \to K^m$ للتطبيق الخطي الموافق للمصفوفة A بالنسبة للقاعدتين القانونيتين ، فإن رتبة T تساوي p (رتبة A) . إن مجموعة الاشعة x من K^n حيث $Ax = 0$ تحقق العلاقة $T(x) = 0$ فهي تشكل نواة التطبيق الخطي T . إذن تشكل هذه الاشعة فراغاً شعاعياً جزئياً من K^n عدد أبعاده يساوي $n - p$ ، استناداً للنظرية [١٢ - ٦] .

٢٧٦ - لتكن $A = [\alpha_j{}^i]$ مصفوفة من السعة $m \times n$. إن عدد أشعة أعمدة المصفوفة المستقلة خطياً يساوي عدد أشعة أسطر المصفوفة المستقلة خطياً (الرتبة العمودية للمصفوفة تساوي رتبتها السطرية) .

الحل : ليكن S الفراغ الشعاعي الجزئي من K^m المولد بأشعة أعمدة المصفوفة $A_1 , \ldots , A_n$ وليكن U الفراغ الشعاعي الجزئي من K^n المولد بأشعة أسطر المصفوفة $A^1 \ldots , A^m$. إذا كانت p الرتبة العمودية لـ A فيوجد p شعاعاً مستقلاً خطياً $A'_1 , \ldots , A'_p$ تولد الفراغ الشعاعي الجزئي S وأن كل شعاع عمود من A يكتب كتركيب خطي في هذه الأشعة :

$$A_j = \sum_{k=1}^{p} \beta_j{}^k A'_k \quad , \quad j = 1 , \ldots , n$$

حيث $N = [\beta_j{}^k]$ مصفوفة من السعة $p \times n$.

إذا رمزنا بـ $A' = [\gamma_k{}^i]$ للمصفوفة المؤلفة من الأعمدة $A'_1 , \ldots , A'_p$ فنجد أن :

$$\alpha_j{}^i = \sum_{k=1}^{p} \beta_j{}^k \gamma_k{}^i$$

وتكتب هذه العلاقة بدلالة الأسطر بالعلاقة الشعاعية :

$$A^i = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k{}^i \; N^k \qquad , \qquad i = 1 , \ldots , m$$

حيث N^k أشعة أسطر المصفوفة $N = [\,\beta_j{}^k\,]$.

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن أشعة أسطر المصفوفة A عناصر من الفراغ الشعاعي الجزئي المتولد بالأشعة $N^1 , \ldots , N^p$. فاذا كانت q الرتبة السطرية للمصفوفة A فان $q \leqslant p$. وبطريقة مشابهة نجـد أن $p \leqslant q$ وبالتالي نجد أن $p = q$ وهو المطلوب .

٢٧٧ - ليكن V و W فراغين شعاعيين على الحقل K عـدد أبعادهما m و n على الترتيب . إذا كانت A المصفوفة المرافقـة للتطبيق الخطي $T : V \to W$ بالنسبة لقاعدتين مفروضتين في V و W فان رتبة المصفوفة A تساوي رتبة التطبيق T أي عدد أبعاد $T(V)$ ، (خيـال V وفق T) .

الحل : لتكن $\{ u_i \}$ قاعدة في V و $\{ w_j \}$ قاعـدة في W ؛ إذا كانت المصفوفة $A = [\,\alpha_i{}^j\,]$ فان T من الشكل :

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i{}^j \, w_j \qquad , \qquad i = 1 , \ldots , m$$

لنأخذ عناصر كيفية $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n \in K$ ولنشكل المجموع :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, T(u_i) = \sum_{i\,,\,j} \lambda_i \, \alpha_i{}^j \, w_j$$

بما أن الأشعة $w_1, \ldots, w_n$ مستقلة خطياً فان $\sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j w_j = 0$ يؤدي الى كون :

$$\sum \lambda_i \alpha_i^j = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

وتكتب هذه العلاقات بدلالة أشعة أعمدة المصفوفة A بالمعادلة الشعاعية :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i = 0$$

نستنتج مما سبق أن العلاقة $\sum_i \lambda_i T(u_i) = 0$ تكافىء العلاقة $\sum \lambda_i A_i = 0$ وبالتالي فان الشرط اللازم والكافي ليكون عدد من الأشعة $T(u_1), \ldots, T(u_m)$ مستقلة خطياً ، أن تكون أشعة أعمدة المصفوفة A والتي لها الأدلة ذاتها مستقلة خطياً ، أي أن رتبة المصفوفة A تساوي رتبة التطبيق الخطي الموافق T .

٢٧٨ ـ لتكن A مصفوفة من السعة $m \times n$ على الحقل K . إذا كانت p رتبة المصفوفة A فتكون أكبر مصفوفة مربعة جزئية منتظمة من A ذات سعة $p \times p$.

الحل : يوجد ، استناداً للتمرين ٤٧٦ p شعاع سطر (أو عمود) من A مستقلة خطياً . تشكل هذه الاشعة مصفوفة جزئية ، A' ، من A من السعة $p \times n$. بما أن المصفوفة الجزئية A' تحوي على p شعاع سطر مستقلة خطياً فهي تحوي ، استناداً للتمرين ٤٧٦ p شعاع عمود مستقلة خطياً . تشكل أشعة الاعمدة هذه مصفوفة جزئية ، A'' ، من A' من السعة $p \times p$. إن رتبة المصفوفة A'' تساوي p فهي مصفوفة منتظمة وهو المطلوب .

تمارين غير محلولة

٢٧٩ - لتكن المصفوفات :

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب المصفوفات التالية .

$$AB \; , \; AC \; , \; BC \; , \; A(B + C^t) \; , \; 2C - 3B^t$$

٢٨٠ - لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

إحسب $3A - 2A^t \; , \; A^3 - 2A^2 + A - I \; , \; A^{-1}$

٢٨١ - ليكن التطبيق الخطي $T : R^3 \to R^3$ المعطى بالعلاقة :

$$T(x, y, z) = (x + y + z \; , \; x - y + 2z \; , \; 3x - 2y + z)$$

حيث (x, y, z) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^3 بالنسبة للقاعدة القانونية .

أوجد المصفوفة المرافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية في R^3 . عين رتبة هذه المصفوفة .

٢٨٢ - برهن أنه من أجل كل مصفوفة مربعة منتظمة A تتحقق العلاقة $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

٢٨٣ - برهن أن معكوس مصفوفة قطرية هي مصفوفة قطرية .

٢٨٤ - أوجد المصفوفة المعاكسة للمصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

٢٨٥ - ليكن $T : R^3 \to R^2$ و $F : \to R^3$ التطبيقين الخطيين المعرفين بالعلاقتين :

$$T(x, y, z) = (x + y - z , 5x + 2y - 3z)$$

$$F(x, y, z) = (-x + 2y + z , 3y + 3z , x - 3y + z)$$

حيث (x , y , z) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^3 بالنسبة للقاعدة القانونية . والمطلوب :

(١) أوجد المصفوفات الموافقة للتطبيقات T و F , ToF , F^2 .

(٢) أوجد نواة ورتبة كل من التطبيقات T و F , ToF .

٢٨٦ - لتكن المصفوفتان ،

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التالية : $A - 2B$ و A^{-1} و B^{-1} و $2B - 3A^t$.

٢٨٧ - ليكن T المؤثر الخطي (التطبيق الخطي) المعرف على

R^2 بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

حيث (x_1, x_2) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^2 بالنسبة للقاعدة القانونية . والمطلوب .

(١) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية .

(٢) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2) حيث أن :

$$u_1 = (1, 2) \quad , \quad u_2 = (1, -1)$$

(٣) برهن أنه مهما كان العدد $\alpha \in R$ فإن للمؤثر الخطي $T - \alpha I$ مؤثراً خطياً معاكساً .

٢٨٨ - ليكن T المؤثر الخطي على R^3 المعطى بالعلاقة :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_3 \;,\; 2x_1 + 4x_2 + x_3 \;,\; x_1 + 3x_2)$$

حيث (x_1, x_2, x_3) تمثل مركبات شعاع كيفي من R^3 بالنسبة للقاعدة القانونية . والمطلوب :

(١) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة القانونية .

(٢) إيجاد المصفوفة الموافقة لـ T بالنسبة للقاعدة (u_1, u_2, u_3) حيث :

$$u_1 = (1, 0, 1) \quad , \quad u_2 = (1, -2, 1) \quad , \quad u_3 = (2, 1, -1)$$

(٣) إثبات أن T تطبيق خطي منتظم ثم إيجاد التطبيق المعاكس T^{-1} .

٢٨٩ - ليكن T التطبيق الخطي $T : R^3 \to R^3$ المرافق للمصفوفة

A بالنسبة للقاعدة القانونية حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

أوجد قاعدة في نواة التطبيق الخطي T . تمم هـذه القاعدة لتصبح قاعدة في R^3 .

٢٩٠ ـ لتكن المصفوفات التالية المعرفة على الحقل C ، حقل الأعداد المركبة :

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & i & 1+i \\ 1 & -2 & i \\ i & 1 & 2-i \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} i & 2+i & 1 \\ 1 & 2-i & 1+i \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التالية :

$$AB \quad , \quad AC \quad , \quad CB \quad , \quad (1+i)B \quad , \quad B - iB^t$$

٢٩١ ـ لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ، أوجدالمصفوفة المعاكسة A^{-1} . برهن أن :

$$A^2 = A \quad , \quad (A^{-1})^2 = A^{-1}$$

٢٩٢ ـ لدينا التطبيقات التالية التي تقابل كل مصفوفة من السعة 2×2 معرفة على حقل F بعنصر من هذا الحقل وفق مايلي :

(١) $$f_1 \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 \alpha_1^2 - \alpha_2^1 \alpha_2^2$$

(٢) $$f_2 \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

(٣)

$$f_3 \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 + \alpha_2^2$$

(٤)

$$f_4 \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} = \alpha_1^1 \ \alpha_2^2$$

هل هذه التطبيقات متعددة الخطية .

٢٩٣ - لتكن A مصفوفة المؤثر الخطي في $V_3(R)$ المعرف بما يلي :

$$A(x, y, z) = (3x - 2z \ . \ 5y + 7z \ , \ x + y + z)$$

احسب det A .

احسب المعينات التالية :

٢٩٤ -

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$$

٢٩٥ -

$$\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix}$$

٢٩٦ -

$$\begin{vmatrix} \sin^3\alpha & \sin^2\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha \\ \sin^3\beta & \sin^2\beta\cos\beta & \sin\beta\cos^2\beta & \cos^3\beta \\ \sin^3\gamma & \sin^2\gamma\cos\gamma & \sin\gamma\cos^2\gamma & \cos^3\gamma \\ \sin^3\delta & \sin^2\delta\cos\delta & \sin\delta\cos^2\delta & \cos^3\delta \end{vmatrix}$$

* ٢٩٧ – برهن أن :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \alpha_2 & \lambda & \dots & \lambda \\ . & . & . & & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = \delta(\lambda) - \lambda \frac{d\delta}{d\lambda}$$

حيث : $\delta(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda)\dots(\alpha_n - \lambda)$

* ٢٩٨ – برهن أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ . & . & . & & . \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$$

حـــل جمل المعادلات :

٢٩٩ –

$$2x - z = 1$$
$$2x + 4y - z = 1$$
$$-x + 3y + 3z = 2$$

٣٠١ –

$$5x + 4z + 2t = 3$$
$$x - y + 2z + t = 1$$
$$4x + y + 2z = 1$$
$$x + y + z + t = 0$$

٣٠٢ –

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + n x_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} x_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_1 + n x_2 + \frac{n(n+1)}{2} x_3 + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1 . 2 \ldots (n-1)} x_n = \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1 . 2 \ldots n}$$

٣٠٣ -

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 1 \\ x_1 \quad + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 2 \\ x_1 + x_2 \quad + \ldots + x_{n-1} + x_n &= 3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} &= n \end{aligned}$$

٣٠٤ - اذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فاوجد $\bar{A}$ (مصفوفة المتممات الجبرية) و A^{-1} .

٣٠٥ - لنفرض أن المصفوفة A قطرية و B مثلثية :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n^n \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots & \beta_n^1 \\ 0 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_n^n \end{bmatrix}$$

(١) برهن أن $\overline{A}$ قطرية وأن $\overline{B}$ مثلثية .

(٢) برهن أن مقلوب A و B من الشكل :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} (\alpha_1^1)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\alpha_2^2)^{-1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (\alpha_n^n)^{-1} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} (\beta_1^1)^{-1} & \gamma_2^1 & \dots & \gamma_n^1 \\ 0 & (\beta_2^2)^{-1} & \dots & \gamma_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (\beta_n^n)^{-1} \end{bmatrix}$$

الفهرس

الفصل الاول — العمليات الجبرية (قوانين التشكيل) :

الفصل الثاني — الاعداد الطبيعية والاعداد الصحيحة :

الفصل الثالث — نظرية الزمر :

الفصل الرابع — الحلقة والحقل :

الفصل الخامس — الفراغات الشعاعية :

معجم المصطلحات

« أ »

Epimorphisme	Epimorphism	٣٢	ايبمومورفيزم
Indomordhisme	Indomorphism	٣٢	اندومورفيزم
Automorphisme	Automorphism	٣٢	اوتومورفيزم
Isomorphisme	Isomorphism	٣٢	ايزومورفيزم
Indépendance linéaire	Linear independence	٢٦٤	استقلال خطي
Dépendance linéaire	Linear dependence	٢٦٤	ارتباط خطي
Inversion	Inversion	٢٨٤	انقلاب (في متبادلة)

« ب »

Structure	Structure		البنية
Structure algébrique	Algabraic structure	٢٩	– الجبرية
Support de structure	Support of structure	٣٠	دعامة –
structure mathématique	Mathematical structure	٣١	– الرياضية
Péano	Peano	٦٧	بيانو (مبادىء)

« ت »

Division euclidienne	Division algorithm	٧٧	التقسيم الاقليدي
Congruence	Congruence (relation)	٧٧	توافق (علاقة)
Classes résiduelles	Residue classes	٨٨	اصناف –
Permutation	Permutation	١٣٥	تبديل
Substitution	Substitution	١٣٥	تعويض
Transformation linéaire	Linear transformation	١٣٥	تحويل خطي

Application —	Linear mapping	٣٠٣	تطبيق خطي
Rang d' —	Rank of mapping	٣١١	رتبة —
Transposée d' —	Transpose of mapping	٣٢٥	منقول —
— identique	Identity mapping	٣٠٤	— مطابق
— nulle	Zero (Null) mapping	٣١٦	— معدوم
— multilinéaire	Multilinear mapping	٣٨٦	— متعدد الخطية
— — Alternée	Alteranting multilinear	٣٨٧	— — متناوب

' ج '

Algébre sur un corps	Algebra on a field	٣٢٧	جبر على حقل
Produit vectoriel	Vector product	١٤	الجداء الشعاعي
— scalaire	Inner (Scalar) —	٧	— الداخلي (السلمي)

' ح '

Anneau	Ring	١٩١	حلقة
— intégre	Integral —	٢١٤	— تامة
— Commutatif	Commutative —	١٩٢	— تبديلية
Sous —	Sub —	٢١٠	— جزئية
-des nombres rationnels	— of rational numbers	١٩٦	— الاعداد العادية
— des polynomes	— of polynomials	٢٠٧	— كثيرات الحدود
— unitaire	Identity —	١٩٢	— واحدية
Idéal	Ideal	٢١٢	الجزء المثالي
Corps	Field	٢١٦	حقل
— commutatif	Commutative —	٢١٦	— تبديلي
sous —	Sub —	٢١٩	— جزئي
Idéal	Ideal	٢٢٠	الجزء المثالي —
Centre de —	Center of —	٢١٦	مركز —

« غ »

Image	Image		خيال
— par une application linèaire	— by linear mapping	٢٠٦	– تطبيق خطي
— homomorphique	Homomorphic —	١٦٣	– هومومورفي

« ز »

Groupe	Group	١٢٩	زمرة
— abélien	Abelian —		– آبلية
— commutatif	Commutetive —	١٤٢	– تبديلية
— symetrique	Symmetric —	١٣٥	– تناظرية
sous —	Sub —	١٤٣	– جزئية
— invariant (distinguè)	Invariant —	١٥٢	– لا متغيرة
— additif	Additive —	١٣٢	– جمعية
— Cyclique	Cyclic —	١٥٠	– دوارة
— muliplicatif	Multiplicative —	١٣٢	– ضربية
— centre de	Center of —	١٧٢	مركز –

« ش »

Vecteur	Vector	٢٥٠	شعاع
— propre	Eigen —	٢٤٠	– ذاتي

« ص »

Mineur	Minor	٣٩٦	صغير العنصر

« ع »

Operation	Operation	٧	عملية
— Commutative	Commutative —	١٣	— تبديلية
— Associative	Associative —	١٢	— تجمعية
— Distributive	Distributive —	١٥	— توزيعية
— binaire	Binary —	٨	— ثنائية
Table d' —	— table	١٠	جدول —
— externe	External —	٢٦	— خارجية
— interne	Internal —	٨	— داخلية
— inverse	Inverse —	٢٥	— معاكسة
Composé	Composite	٨	ناتج —
Elément	Element		عنصر
— Permutable	Commutable —	١٤	— قابل للمبادلة
— symètrisables	Invertible —	١٧	— قابل للمناظرة
— symetrique	Symmetric —	١٧	— نظير
— — à gauche	Left — —	١٧	— - أيسر
— — à droite	Right — —	١٧	— - أيمن
— neutre	(identity) Neutral —	١٧	— محايد
— — à gauche	Left — —	١٧	— - أيسر
— — à droite	Right — —	١٧	— - أيمن
— idempotent	Idempotent —	١٠٨	— متساوي القوى
— nilpotent	Nilpotent —		— معدوم القوى
— régulier	Regular —	٢٣	— منتظم
Nombre	Number		عدد
— entier	Integer	٨٤	— صحيح
— naturel	Natural —	٦٧	— طبيعي
— rationnel	Rational —		— عادي
— irrationnel	Irrational —		— غير عادي
Relation	Ralation		علاقة

— de congruence	Congruence —	— التوافق ٧٧
— compatible (avec)	Compatible (with)	— منسجمة (مع عملية) ٢٥

« ف »

Espace vectoriel	Vector space	الفراغ الشعاعي ٢٥٠
Dual d' —	Dual —	— الثنوي ٣٢٣
Sous —	Vector subspace	— الجزئي ٢٦١
Dimension d' —	Dimension of	أبعاد — ٢٦٩
Base d'	Basis of —	قاعدة — ٢٧٣
— des applications linéaires	The space of linear mappings	— التطبيقات الخطية ٣٢١
S. E. V. orthogonal	Orthogonal subspace	— جزئي متعامد ٣٠٨
— des matrices carrées	The space of square matrices	— المصفوفات المربعة ٢٨٠

« ق »

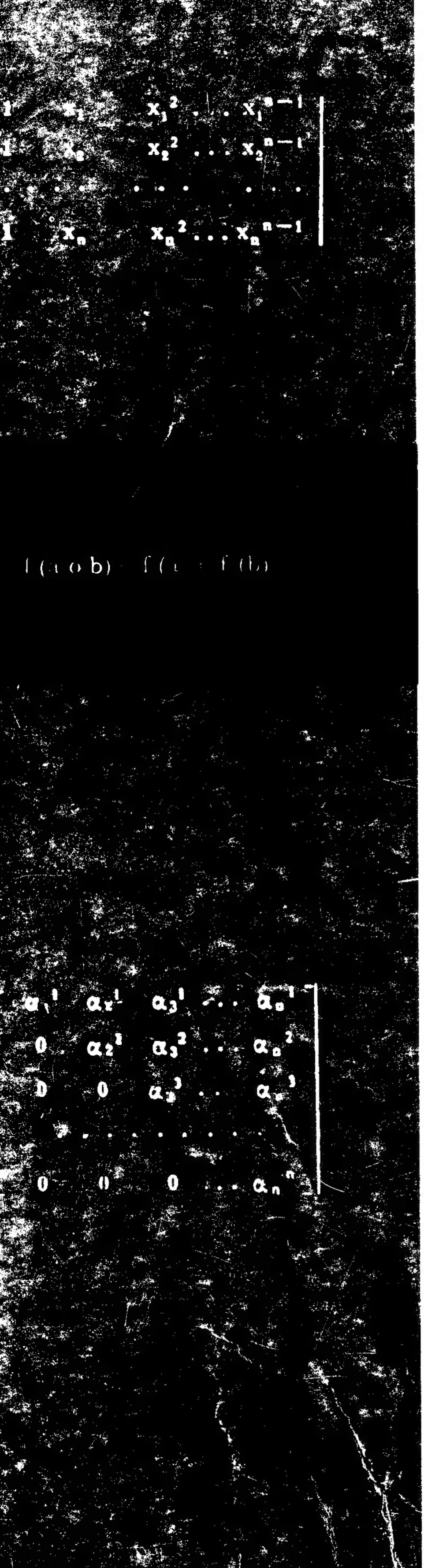
Diviseur de zéro	Divisor of zoro	قاسم الصفر ٢١٥
Loi de composition	(Law of composition)	قانون تشكيل (انظر عملية)
Base	Basis	قاعدة (اساس)
— d'espace vectorial	— of a vector space	— فراغ شعاعي ٢٧٣
— canonique	Canonical —	— طبيعية (قانونية) ٢٧٤
— duales	Dual —	— ثنوية ٣٢٤
Formules de Cramer	Cramer rule	— (طريقة) كرامر ٤٠٨
Valeur propre	Eigenvalue	قيمة ذاتية ٢٤١

« ك »

Cayley	Cayley	كايلي (نظرية) ١٠٥

« م »

Monoïde	Monoïd	٢٢	مونوئيد
Monomorphisme	Monomorphism	٣٢	مونومورفيزم
Opérateur	Operator	٣٢٣ ، ٢٧	مؤثر
— différantiel	Differential —	٣٢٥	– تفاضلي
— integral	Integral —	٣٣٩	– تكاملي
— neutre	Neutral —	٣٢٦	– حيادي
— gauche	Left —	٢٧	– ايسر
— droite	Right —	٢٧	– اين
Domaine de —	Domain of —	٢٧	ساحة (موثرات)
Ensemble	Set		مجموعة
— stable	Stable —	١١	– مستقرة
— fermé	Closed —	١١	– مغلقة
Matrice	Matrix	٣٦١	مصفوفة
— antisymetrique	Skew symmetric —	٤٢٥	– ذات تناظر مائل
— diagonale	Diagonal —	٣٦٤	– قطرية
— singulière	Singular —	٣٨٢	– شاذة
— nulle	Zero —	٣٦٣	– صفرية
— Reguliére	Regular —	٣٨٢	– منتظمة
— carrée	Square —	٣٦٤	– مربعة
— triangulaire	Triangular —	٣٦٥	– مثلثية
— unité	Identity —	٣٦٤	– الواحدة
— symetrique	Symmetric —	٣٨١	– متناظرة
Trace d'une —	Trace of —	٣٦٤	أثر مصفوفة
Ligne —	Row of —	٣٦١	سطر –
Colonne —	Column of —	٣٦٢	عمود –
Transposée —	Transpose —	٣٦٣	منقول –
Inverse	Inverse —	٤٠٠	مقلوب(معكوس) –



هذا الكتاب :

- هو الثاني من سلسلة كتب في الرّياضيات المعاصرة موضع اهتمام جميع العاملين في ميادين العلم والتربية في جميع أنحاء العالم .
- يقدّم المواضيع التالية :
  - الزّمرة والحلقة والحقل
  - الفراغ الشعاعي
  - التطبيقات الخطيّة
  - المصفوفات . المعيّنات
- يتميز بأسلوبه الذي ينتفع منه المبتدئون في دراسة الرّياضيّات المعاصرة ويستفيدُ منه المطلعون عليها والراغبون في المزيد من الاطلاع .
- يعتمد في بحثه على العرض النظري الواضح والمسائل العديدة ، محلولة وغير محلولة مع الأجوبة .
- يُعتبر محاولة جادة لدعم الاتجاه المعاصر في تطوير مناهج الرّياضيّات ، ذلك الاتجاه الذي احتلّ مكانا هامًا في الجامعات الاجنبية والعربية

مؤسسة الرسالة